

無限要素の開発

菊池 愛子*

Development of Infinite Elements for Advance/FrontSTR

Aiko Kikuchi*

有限要素法（FEM: Finite Element Method）は、構造物や物体を小さな要素に分割し、それぞれの要素の挙動を計算して全体の振る舞いを予測する数値解析手法である。複雑な形状や材質が入り組んだ構造、荷重条件を持つ問題を、コンピュータを用いて正確に解析できるため、現在、FEM は構造解析の必須のツールとなってきた。しかし FEM は地盤のように無限に広がる領域においては、モデルが巨大化して計算負荷が膨大となってしまう弱点がある。モデル規模を制限するために人工的に境界を設ければ、結果の応力分布等に端部拘束の影響が出て、境界からの反射波が発生して異なる現象となってしまう不具合がある。無限要素はこの無限領域の解析を効率的に行うための手段である。今回、静解析および動解析で使用するための無限要素を構造解析ソフトウェア Advance/FrontSTR に組み込んだので、その概要および効果について報告する。

<https://doi.org/10.69290/j.001238-vol33>

Keywords: 無限領域、無限要素、吸収境界、構造解析、地盤解析

1. はじめに

無限要素は FEM で無限領域の解析を行う際の補間機能を提供する。有限要素領域の外に無限を模擬する要素を設けて地盤等の半無限領域を低い計算負荷で解析することを目的としている。無限要素は地盤の振動や、大規模構造物の地盤との連成等を検討する際に有効である。

図 1 に示すのは想定地震による地殻変動解析の例で、図示した解析領域の外側に無限要素を配置して実施した解析結果である。端部を拘束せずに無限につづく領域としたことで、端部拘束の影響を排除している。

今回 Advance/FrontSTR に組み込んだ無限要素を表 1 に示す。静解析と動解析により無限要素を使い分ける。

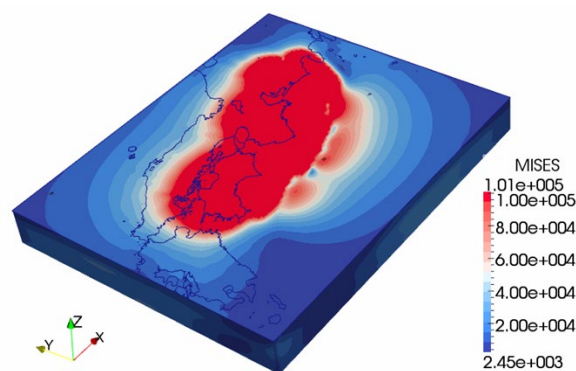
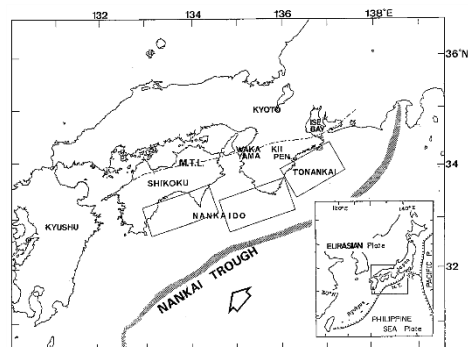


図 1 想定地震例による地殻変動解析

*アドバンスソフト株式会社 第2事業部

2nd Computational Science and Engineering Group,
AdvanceSoft Corporation

表 1 無限要素

解析 種類	要素名	要素 タイプ	特徴
静解 析	静的無 限要素	六 面 体 1 次	標準的な形状関数 を使用するが、自然 座標が特定の値に 近づくと、要素が無 限に漸近する
動解 析	吸収境 界要素	三 角 形 1 次 四 辺 形 1 次	境界で波が反射す るのを防ぐ。音響や 構造の波動伝搬で 広く使われた実績 がある

2. 静的無限要素

2.1. 定式化

静的無限要素を図-2 に示す。1 方向が無限となる 8 節点の要素であり、 ξ の正方向が無限遠方に向かう方向である。ユーザーは図中の左半分（ ξ が負）の有限領域のみを入力し、プログラム内部で右側の無限に延長される要素範囲を仮想的に生成して、無限領域を含む剛性を作成する。無限要素の節点は図中 1～8 で指定する。

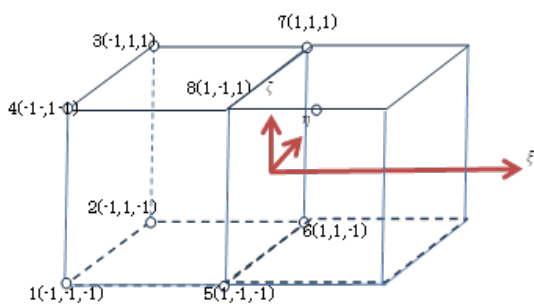


図 2 形状関数

ξ が正と負の領域で別の定式化を取り、 ξ が 1 に漸近すると形状関数は無限に向かう。

形状関数($\xi \leq 0$)

$$N_i = -\frac{1}{4}\xi(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta) \quad (1)$$

$(i = 1, 2, 3, 4)$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta) \quad (2)$$

$$(i = 5, 6, 7, 8)$$

形状関数($\xi > 0$)

$$N_i = -\frac{1}{2}\xi(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta) \quad (3)$$

$/(1 - \xi) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta) \quad (4)$$

$/(1 - \xi) \quad (i = 5, 6, 7, 8)$

座標の補間を下式で行う。

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i \quad (5)$$

$$y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i \quad (6)$$

$$z = \sum_{i=1}^8 N_i z_i \quad (7)$$

変位は無限遠点で 0 となる条件を満たす必要があるため、以下に示す減衰関数 f を用いており、 r が無限となれば 0 となる。

$$f\left(\frac{r_i}{r}\right) = \frac{r_i}{r} = \frac{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (8)$$

変位関数 M_i を以下で表す。

$$M_i = M_i^0 f\left(\frac{r_i}{r}\right) \quad (9)$$

変位は以下となる。

$$u = \sum_{i=1}^8 M_i u_i \quad (10)$$

$$v = \sum_{i=1}^8 M_i v_i \quad (11)$$

$$w = \sum_{i=1}^8 M_i w_i \quad (12)$$

要素歪は節点変位より以下で表される。

$$\{\varepsilon\}^{(e)} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T \quad (13)$$

$= [B]\{\delta\}^{(e)}$

$$\{\delta\}^{(e)} = \{u_1, v_1, w_1, \dots, u_8, v_8, w_8\}^T \quad (14)$$

$$[B] = [B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8] \quad (15)$$

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \partial M_i / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial M_i / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial M_i / \partial z \\ \partial M_i / \partial y & \partial M_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial M_i / \partial z & \partial M_i / \partial y \\ \partial M_i / \partial z & 0 & \partial M_i / \partial x \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (16)$$

ここで

$$M_i = M_i^0 f\left(\frac{r_i}{r}\right) = N_i f\left(\frac{r_i}{r}\right) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_i}{\partial x} &= \frac{\partial M_i^0}{\partial x} f\left(\frac{r_i}{r}\right) + M_i^0 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\frac{r_i}{r}\right) \\ &\quad + N_i \left(-\frac{r_i}{r^2}\right) \frac{x}{r} \\ &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\frac{r_i}{r}\right) - N_i \left(\frac{r_i}{r}\right) \frac{x}{r^2} \end{aligned} \quad (18)$$

同様に

$$\frac{\partial M_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(\frac{r_i}{r}\right) - N_i \left(\frac{r_i}{r}\right) \frac{y}{r^2} \quad (19)$$

$$\frac{\partial M_i}{\partial z} = \frac{\partial N_i}{\partial z} \left(\frac{r_i}{r}\right) - N_i \left(\frac{r_i}{r}\right) \frac{z}{r^2} \quad (20)$$

N_i の導関数は以下である

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (22)$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^8 N_i x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^8 N_i y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^8 N_i z_i\right)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_i}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\frac{\sqrt{(x_i)^2 + (y_i)^2 + (z_i)^2}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^8 N_i x_i)^2 + (\sum_{i=1}^8 N_i y_i)^2 + (\sum_{i=1}^8 N_i z_i)^2}} \right) \\ &\quad - N_i \left(\frac{\sqrt{(x_i)^2 + (y_i)^2 + (z_i)^2}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^8 N_i x_i)^2 + (\sum_{i=1}^8 N_i y_i)^2 + (\sum_{i=1}^8 N_i z_i)^2}} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\frac{x}{\sqrt{(\sum_{i=1}^8 N_i x_i)^2 + (\sum_{i=1}^8 N_i y_i)^2 + (\sum_{i=1}^8 N_i z_i)^2}} \quad \frac{\partial M_i}{\partial y}, \frac{\partial M_i}{\partial z} \text{ も同様に求まる。}$$

これにより $[B]$ を要素節点および着目ガウス点の全体座標、形状関数 N_i から求めることができる。 $[B]$ を用いて、剛性行列を作成する。

2.2. 静的無限要素の適用例

2.2.1. 解析条件

諸元	仕様
全体モデル	1 辺 12m の立方体
解析対象領域	1 辺 6m の立方体
材質	$E=2.128 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, $\nu = 0.33$
集中荷重	100 k N

集中荷重による地盤内応力を Advance/FrontSTR により解析した。この理論解は以下に示すブシネスク解として知られている。

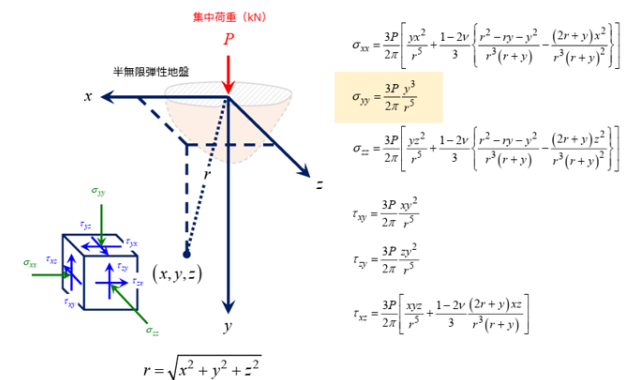


図 3 集中荷重による地盤内応力（理論解）

[https://www.research.kobe-u.ac.jp/rcuss-geo-](https://www.research.kobe-u.ac.jp/rcuss-geo-env/LabHomePage/class/doriki2/docs/土質力学Ⅱ 03 配布資料.pdf)

[env/LabHomePage/class/doriki2/docs/土質力学Ⅱ 03 配布資料.pdf](https://www.research.kobe-u.ac.jp/rcuss-geo-env/LabHomePage/class/doriki2/docs/土質力学Ⅱ 03 配布資料.pdf) より引用

地中応力の分布を以下に示す。

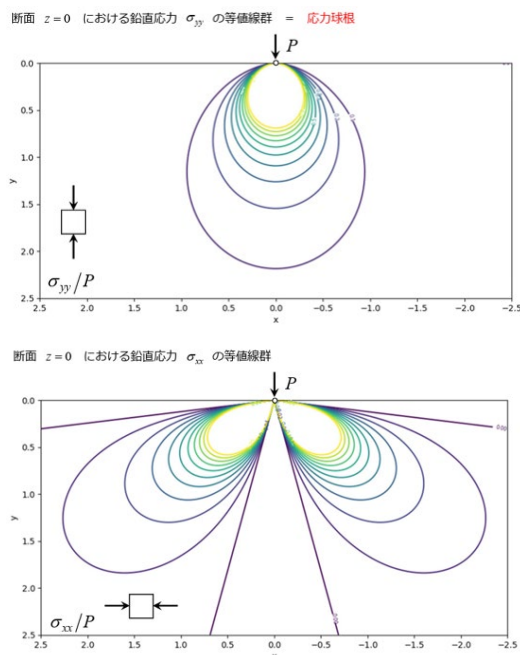


図 4 集中荷重による地盤内応力分布（上段；鉛直 下段；水平）

<https://www.research.kobe-u.ac.jp/rcuss-geo-env/LabHomePage/class/doriki2/docs/土質力学 II 03 配布資料.pdf> より引用

Advance/FrontSTR による解析モデルを図 5 に、Mises 応力の分布を図 6 に示す。

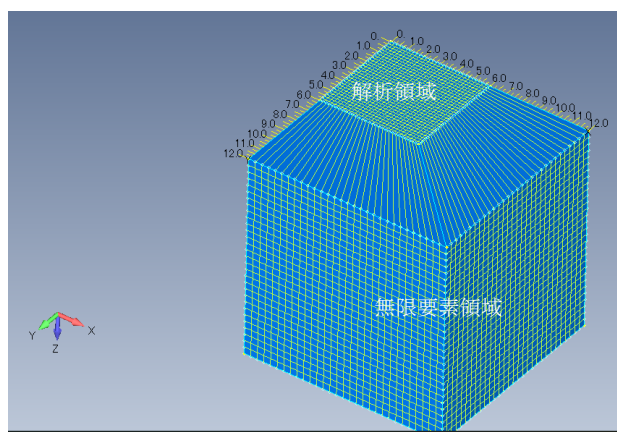


図 5 解析モデル

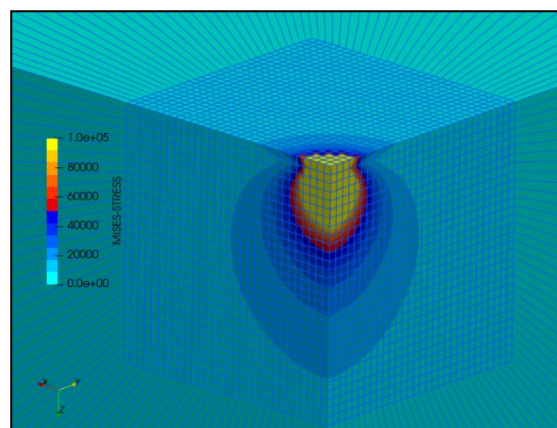
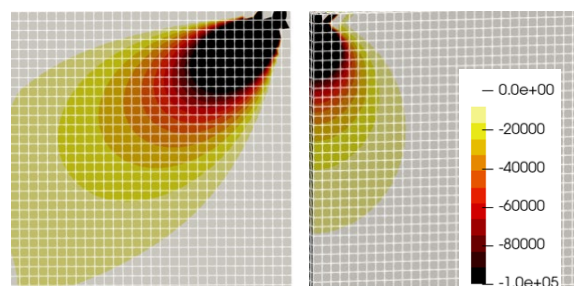


図 6 Mises 応力

図 7 に FEM で求めた水平と鉛直の応力分布を示す。上段は無限要素を使用した場合、下段は有限要素のみの場合である。有限要素のみの場合は周囲の拘束の影響を受けて、実際にはない応力が発生するが、無限要素を使用した場合はブシネスク解と概ね一致し、無限領域を模擬していることが分かる。

有限要素＋無限要素



有限要素のみ

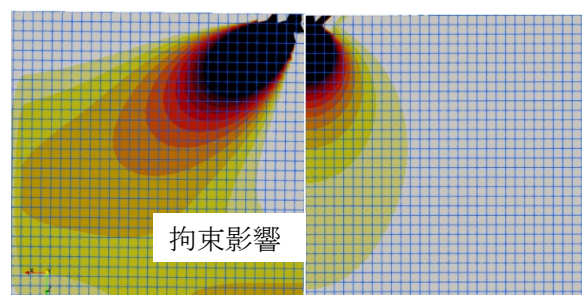


図 7 集中荷重による地盤内応力（FEM 解析）（左；水平 σ_x 右；鉛直 σ_z ）

3. 吸収境界要素

動解析のためには吸収境界要素を組み込んだ。ただし、これは時刻歴応答での使用を前提としている。

3.1. 定式化

吸収境界では境界に到達した波動が速度に比例する抵抗力を受けると仮定する。

$$\sigma_n = -\rho V_p v_n \quad (24)$$

$$\sigma_s = -\rho V_s v_s \quad (25)$$

ここに

σ_n ; 境界に垂直な方向の応力

σ_s ; 境界に平行な方向の剪断力

ρ ; 媒質の密度

V_p ; P 波速度

V_s ; S 波速度

v_n ; 境界に垂直な方向の速度

v_s ; 境界に平行な方向の速度

減衰行列は境界面に働く上記の応力を境界節点に配分するように作成した。

吸収境界を設置すれば、境界に垂直に入射する波を吸収することができるが、斜めに入射する波の吸収は十分とはいえないといわれている。

3.1. 使用例

3.1.1. 垂直入射波

(1) 解析条件

立方体地盤の上面から連続的に圧縮波を入力した場合を示す。下面に吸収境界を設置する。

諸元	仕様
モデル形状	1 辺 20m の立方体
材質	$E=2.128 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, $\nu=0.33$ $\rho=2100 \text{ kg/m}^3$
周期	0.04 秒
計算区間	0.2 秒
時間増分	0.002 秒
圧力片振幅	1 N/mm^2

(2) 解析結果

鉛直方向の歪分布の推移を図 8 に示す。ここで示した状況では圧縮波は下面で反射されることなく、吸収されていることが分かる。

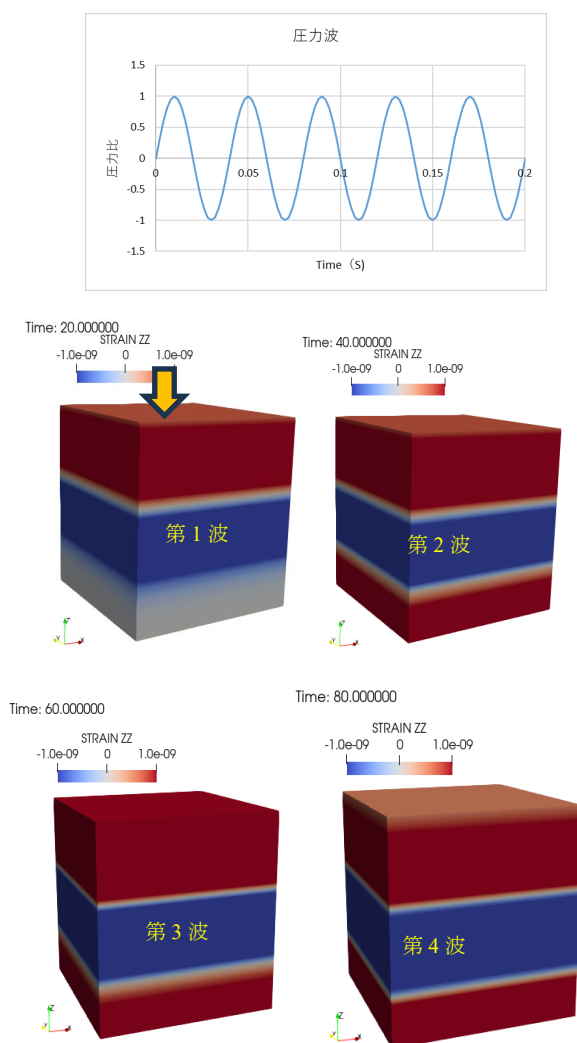


図 8 地盤内鉛直方向歪の推移

3.1.2. 放射波

(1) 解析条件

円盤の中央から外円周に向かって膨張波を連続的に放射する。外周面に吸収境界を貼付する。

諸元	仕様
半径	20m
厚さ	1m
材質	$E=2.128 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, $\nu=0.33$ $\rho=2100 \text{ kg/m}^3$
周期	0.04 秒
計算区間	0.2 秒
時間増分	0.002 秒
圧力片振幅	1 N/mm^2

(2) 解析結果

変位絶対値の分布を図 9 に示す。

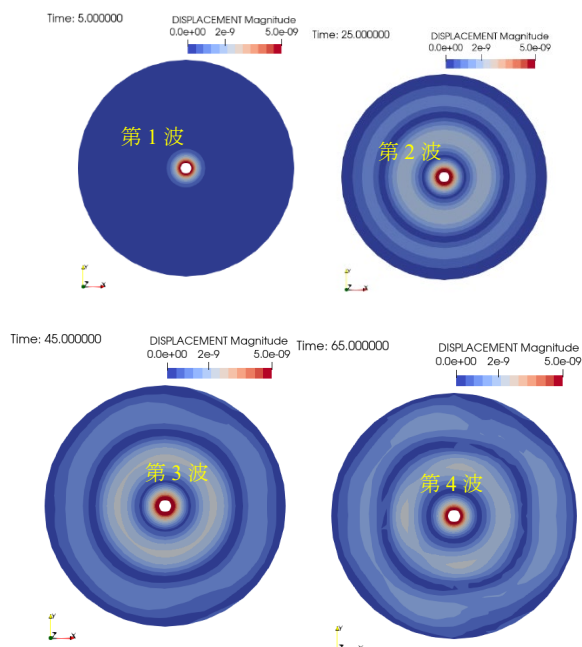
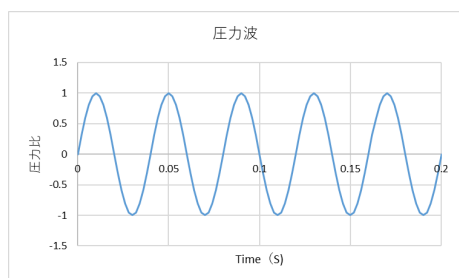


図 9 円盤内変位絶対値の推移

外周面において吸収境界による反射波の低減がみられる。ただし波が繰り返し入射されるに従

い、反射波が増加する傾向もみられる。

4. 広域地盤の地震波動解析

4.1. 解析条件

小モデルで吸収境界の効果を確認したので、無限要素の活用が期待される地盤の地震波動解析を実施した。

地盤モデルは震源を中心とした半径 60 k m の球体の内部領域とし、材質は均質を仮定して地形は無視している。地震荷重は公表されていた震源モーメント (表 3) を用いた。球体の外表面に吸収境界を貼付して、地震発生後の地盤応答を解析した。

表 2 解析条件

項目	仕様
地盤モデル	震源を中心とした半径 60 k m の球体内部
材質	$E=2.128e8\text{N/m}^2$, $\nu=0.33$ $\rho=2100\text{ kg/m}^3$
境界条件	球体の外表面に吸収境界貼付
荷重条件	震源モーメントの公表値 (2024 年 1 月 2 日 4 : 42 能登半島沖 M4.9)

表 3 震源モーメント

発生時刻		震源位置				深さ	マグニチュード M
		緯度	経度				
2024.1.2	4 : 42	北緯 37 度 15.4 分	東経 136 度 40.6 分			12 k m	4.9
Mo	Mrr	Mtt	Mtf	Mrt	Mrf	Mtf	指数
1.34	1.14	0	-1.14	-0.33	0.17	-0.61	16

モーメントテンソル成分(r,t,f)については、r は鉛直上向きが正、t は南向きが正、f は東向きが正とする。

https://www.data.jma.go.jp/eqev/data/bulletin/catalog/notes_j.html

×10 (指数) Nm

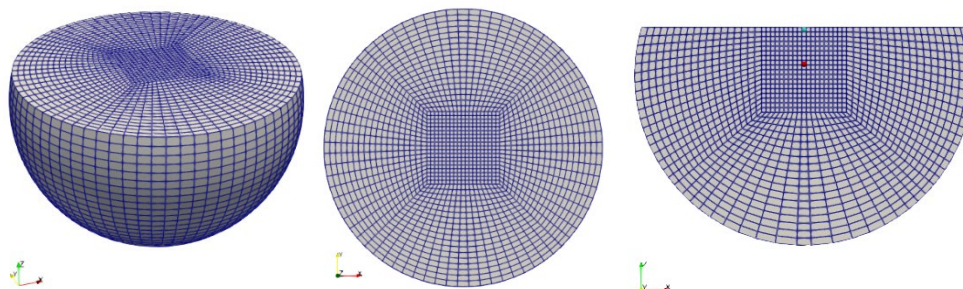


図 2 地盤モデルと震源 (●)

4.2. 地盤モデルと震源

地表の高さは 0.5 km を仮定した。原点は震央における標高 0m に置いた。ライズタイムは 4 秒を仮定し、地震発生後 400 秒間までの応答を解析した。

4.3. 地震波動解析における吸収境界の効果

地震発生後 200 秒（左）、400 秒（右）の変位分布（対数表示）を下図に示す。

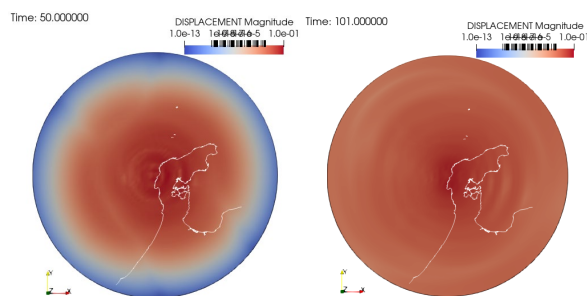


図 3 地表の変位分布の推移

地震波は震源を起点として、ほぼ同心円状に広がっている。吸収境界面に波が垂直に近い状態で入射しており、境界の反射による弊害はみられない。

4.4. 地震波動の伝搬

地中震源位置における地盤切断面近傍の変位分布を下図に示す。変位の絶対値をカラーコンタで、矢印が変位の方向および相対的な大きさを表している。

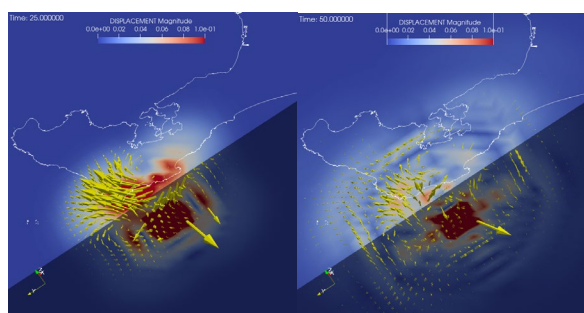


図 4 地中震源近傍の変位分布 地震発生後 100 秒（左）、200 秒（右）

震央を中心とした領域の地表の変位分布を図 5 に示す。地震波動が震源を中心にほぼ同心円状に伝搬する状況が観察できる。

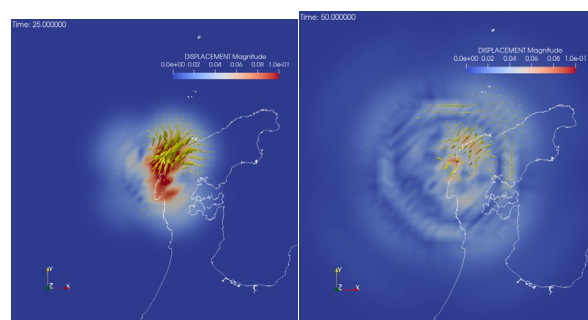


図 5 地表の変位分布 地震発生 100 秒後（左）、200 秒後（右）

5. まとめ

本報では Advance/FrontSTR で半無限領域を効率的に解くために無限要素を開発した。静的問題、動的問題ごとの無限要素を組み込み、単純なモデルに適用してその基本性能を検証した。また実機モデルへの適用能力を調べるために広域地盤の地震波動解析にも使用したが、境界における顕著な反射波は観測されず、Advance/FrontSTR が地震波動解析に対して適用可能であることを示すことができた。

6. 参考文献

- [1] G.BEER J.L.MEEK, 'INFINITE DOMAIN'ELEMENTS, International Journal FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING,VOL,17, 43-52(1981)
- [2] O.C.ZIENKIEWICZ 'A NOVEL BOUNDARY INFINITE ELEMENT' INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING、VOL.19 393-404 (1983)
- [3] https://www.research.kobe-u.ac.jp/rcuss-geo-env/LabHomePage/class/doriki2/docs/土質力学II_0_3配布資料.pdf

※ 技術情報誌アドバンスシミュレーションは、それぞれの文献タイトルの下に記載した DOI から、PDF ファイル（カラー版）がダウンロードできます。また、本雑誌に記載された文献は、発行後に、JDREAMIII（日本最大級の科学技術文献情報データベース）に登録されます。