

構造解析ソフトウェア Advance/FrontSTR Ver. 6.3の直接積分法

鈴木 将之*

Theory reference on nonlinear dynamic analysis of Advance/FrontSTR Ver. 6.3

Masayuki Suzuki*

Advance/FrontSTR は動解析機能として、直接積分法、固有値解析とモード合成解析など各種解析手法を実装している。本稿では Advance/FrontSTR の動解析機能のうち、直接積分法に関わる基礎理論を説明する。Advance/FrontSTR では陰解法として Hilber-Hughes-Taylor 法と、陽解法の 2 種類の解析手法を実装している。

<https://doi.org/10.69290/j.001178-vol32>

Keywords: シミュレーション、ソフトウェア、構造解析、動解析、直接積分法、陰解法、Hilber-Hughes-Taylor 法、陽解法

1. はじめに

Advance/FrontSTR は大規模並列計算汎用有限要素法構造解析プログラムである。Advance/FrontSTR は 3 次元の、静的変形解析、固有値解析、熱伝導解析および動解析に関する非線形解析が可能である。

文部科学省の次世代 IT 基盤構築のための研究開発「イノベーション基盤シミュレーションソフトウェアの研究開発」プロジェクトで、アドバンスソフト株式会社は「構造解析ソフトウェア FrontISTR における材料・幾何学的非線形機能の作成」等の業務を担当し、従来の成果に幾何非線形・材料非線形・接触非線形解析機能を開発した [1]。アドバンスソフトではこれらのソフトウェアを広く世間にすすめるべく独自に改良を進め、2024 年 5 月現在、商用パッケージソフトウェア Advance/FrontSTR Ver 6.3 として販売保守を行っている。

Advance/FrontSTR の特長は、第一に優れた大規模並列計算性能がある。Advance/FrontSTR は大規模並列計算を想定した設計を行っており、従来ソ

フトウェアに比べて非常に高い並列化効率を実現している。第二の特長は実用的な非線形解析である。最後の特長は流体・音響解析などのソフトウェアとの連成解析機能である。表 1 に Advance/FrontSTR Ver 6.3 の解析機能一覧を示す。

表 1 Advance/FrontSTR Ver 6.3 の解析機能一覧

利用可能な解析	
変形解析	静解析
動解析	直接積分法 (陰解法)、直接積分法 (陰解法)、固有値解析、座屈解析、モード合成解析
熱伝導解析	定常解析、非定常解析 (陰解法)
非線形解析機能	
Total Lagrange 法、Updated Lagrange 法、Augmented Lagrange 法、有限すべり、摩擦、材料非線形	
大規模解析支援	
・ アセンブリ構造対応 ・ メッシュ自動細分化 (リファイナー機能)	
地盤変動解析	
・ 地殻変動解析用のモデル作成機能	

表 1 に示した機能のうち、Advance/FrontSTR の

*アドバンスソフト株式会社 第 2 事業部

2nd Computational Science and Engineering Group, AdvanceSoft Corporation

直接積分法機能は Hilber-Hughes-Taylor 法(HHT 法)[2]による陰解法と陽解法により実現している。本稿では Advance/FrontSTR の直接積分法機能に関わる基礎理論を説明する。その目的は[1]と同様であり以下に示す。

1. Advance/FrontSTR が対象範囲とする解析手法に関する理論について解説し、理論的裏付けとして提供する。
2. ユーザーが現象解析に Advance/FrontSTR を適用する際のモデル定義、解析結果の分析などにおける、理論的参考として提供する。

2. 基礎理論

2.1. はじめに

有限要素法における動解析は運動方程式に従い慣性力を考慮する解析である。式 1 に運動方程式を示す。式 1 において、 M と C はそれぞれ質量マトリクスと減衰マトリクス、 Q と F はそれぞれ内力と外力マトリクスである。

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + Q = F \quad (1)$$

質量マトリクス M は式 2 に従い変位ベクトル及び加速度ベクトルを代入することにより得ることができる。式 2 における ρ_0 と ρ_t はそれぞれ時刻 0 と t の質量密度である。

$$\int_V \delta u \cdot \rho_0 \ddot{u} dV = \int_{t_v} \delta u \cdot \rho_t \ddot{u} d^t V \quad (2)$$

$$= \delta U^t M \ddot{U}$$

式 2 で得られた質量マトリクスに対し、行列積を減らすべく質量集中化と呼ばれる、対角マトリクス化を行う。質量集中化の手法はいくつかあるが

[3]、Advance/FrontSTR では $\int_{V_e} N^i N^i dV_e$ (N は形状関数、 i は節点)の比で対角成分に質量を分配する。

Advance/FrontSTR には動解析機能として、直接積分法、固有値解析とモード合成解析など各種解析手法を実装している。本稿では Advance/FrontSTR の動解析機能のうち、直接積分法に関わる基礎理論を説明する。

Advance/FrontSTR では直接積分法機能として HHT 法による陰解法と陽解法を実装している。陰解法は運動方程式に時刻 $t + \Delta t$ におけるものを使用し、反復計算により Δt 間の物理量の値を決定す

るものである。対し陽解法は運動方程式に時刻 t におけるものを使用し、漸進計算により時刻 $t + \Delta t$ の物理量の値を決定するものである。

2.2. 陰解法

Advance/FrontSTR では陰解法として、Newmark- β 法を拡張した HHT 法を実装している。HHT 法では運動方程式として離散化し、定数 α を導入した式 3 を使用する。

$$M^{t+\Delta t} \ddot{U} + C^{t+\alpha\Delta t} \dot{U} + {}^{t+\alpha\Delta t}Q = {}^{t+\Delta t}F \quad (3)$$

${}^{t+\alpha\Delta t}U$ と ${}^{t+\alpha\Delta t}\dot{U}$ は式 4 の通り更新する。なお、Advance/FrontSTR のデフォルト値である $\alpha = 1$ とした場合、Newmark- β 法と同等となる。

$$\begin{aligned} {}^{t+\alpha\Delta t}U &= (1 - \alpha) {}^tU + \alpha {}^{t+\Delta t}U \\ {}^{t+\alpha\Delta t}\dot{U} &= (1 - \alpha) {}^t\dot{U} + \alpha {}^{t+\Delta t}\dot{U} \end{aligned} \quad (4)$$

また、Newmark- β 法同様に ${}^{t+\Delta t}U$ と ${}^{t+\Delta t}\dot{U}$ を式 5 の通り更新する。

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}U &= {}^tU + \Delta t {}^t\dot{U} + \Delta t^2 \left\{ \left(\frac{1}{2} - \beta \right) {}^t\ddot{U} \right. \\ &\quad \left. + \beta {}^{t+\Delta t}\ddot{U} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{U} = {}^t\dot{U} + \Delta t \{ \gamma {}^{t+\Delta t}\ddot{U} + (1 - \gamma) {}^t\ddot{U} \}$$

式 3 から式 5 より、式 6 が得られる。これを反復法により解くことにより k ステップ目の ΔU が得られる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\alpha \gamma}{\beta \Delta t} C + \alpha {}^{t+\Delta t}K^{(k-1)} \right) \Delta U^{(k)} \\ = {}^{t+\Delta t}F - {}^{t+\alpha\Delta t}Q^{(k-1)} \\ - M {}^{t+\Delta t}\ddot{U}^{(k-1)} \\ - C {}^{t+\alpha\Delta t}\dot{U}^{(k-1)} \end{aligned} \quad (6)$$

なお、Advance/FrontSTR では定数 α に対し、定数 β と γ は式 7 の通りに設定される。Advance/FrontSTR のデフォルト値である $\alpha = 1$ とした場合、 Δt に関わらず数値計算が安定する無条件安定となる[3]。

$$\begin{aligned} \beta &= 0.25(2 - \alpha)^2 \\ \gamma &= 1.5 - \alpha \end{aligned} \quad (7)$$

Advance/FrontSTR では減衰としてレイリー減衰を実装している。レイリー減衰を式 7 に示す。式 8 における r_m と r_k は解析制御ファイルより与えられる定数である。

$$C = r_m M + r_k K \quad (8)$$

式 8 を式 6 に代入すると式 9 を得る。

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} + \frac{r_m \alpha \gamma}{\beta \Delta t} \right) M + \right. \\
& \left. \left(\frac{r_k \alpha \gamma}{\beta \Delta t} + \alpha \right) {}^{t+\Delta t} K^{(k-1)} \right\} \Delta U^{(k)} \\
& = {}^{t+\Delta t} F - {}^{t+\alpha \Delta t} Q^{(k-1)} \\
& - M {}^{t+\Delta t} \ddot{U}^{(k-1)} - (r_m M \\
& + r_k K) {}^{t+\alpha \Delta t} \dot{U}^{(k-1)}
\end{aligned} \quad (9)$$

2.3. 陽解法

時刻 $t + \Delta t$ 及び $t - \Delta t$ での変位を時刻 t でのテイラー展開により式 10 と 11 に表すことができる。

$${}^{t+\Delta t} U = {}^t U + {}^t \dot{U} \Delta t + \frac{1}{2!} {}^t \ddot{U} \Delta t^2 + \dots \quad (10)$$

$${}^{t-\Delta t} U = {}^t U - {}^t \dot{U} \Delta t + \frac{1}{2!} {}^t \ddot{U} \Delta t^2 + \dots \quad (11)$$

時刻 Δt^2 までの式 10 と式 11 の差及び和を取ると式 12 と 13 が得られる。

$${}^t \dot{U} = \frac{1}{2\Delta t} ({}^{t+\Delta t} U - {}^{t-\Delta t} U) \quad (12)$$

$${}^t \ddot{U} = \frac{1}{\Delta t^2} ({}^{t+\Delta t} U - 2 {}^t U + {}^{t-\Delta t} U) \quad (13)$$

式 12 と 13 を式 1 の運動方程式に代入すると式 14 が得られる。

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{\Delta t^2} M + \frac{1}{2\Delta t} C \right) {}^{t+\Delta t} U \\
& = {}^t F - {}^t Q \\
& + \frac{1}{\Delta t^2} M (2 {}^t U - {}^{t-\Delta t} U) \\
& + \frac{1}{2\Delta t} C {}^{t-\Delta t} U
\end{aligned} \quad (14)$$

Advance/FrontSTR において、陽解法における減衰マトリクス C は式 15 としている。式 15 における r_m は解析制御ファイルより与えられる定数である。

$$C = r_m M \quad (15)$$

まとめると式 16 となる。

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{r_m}{2\Delta t} \right) M {}^{t+\Delta t} U \\
& = {}^t F - {}^t Q + \frac{2}{\Delta t^2} M {}^t U \\
& + \left(\frac{r_m}{2\Delta t} - \frac{1}{\Delta t^2} \right) M {}^{t-\Delta t} U
\end{aligned} \quad (16)$$

式 15 に示した陽解法は陰解法比べ計算コストを節約することができるものの、条件付安定であり[3]、大きな Δt を取ると数値計算が安定しない。中央差分法に基づく陽解法の安定限界 Δt_{cr} を式 17 に示す。式 17 において、 T_n は最高次固有周期である。

$$\Delta t_{cr} = T_n / \pi \quad (17)$$

3. まとめ

本稿では Advance/FrontSTR で実装されている陰解法の Hilber-Hughes-Taylor 法と陽解法の 2 つの基礎理論を紹介した。Advance/FrontSTR のデフォルト値を使う限り陰解法で解析を実施すると安定的な数値計算を行うことができるが、大きな計算コストを必要とする。陽解法では計算コストを低く抑えることができるが、 Δt が大きすぎれば数値計算が安定せず、 Δt が小さすぎれば計算コストが増えてしまうため、 Δt を注意深く決定する必要がある。基本は陰解法を用い、時刻ステップ内の大きな外力変化や変形がないことを確認した上で陽解法を使用することを推奨する。

参考文献

- [1] 袁熙, Advance/FrontSTR Ver. 3.0 の非線形解析機能について, アドバンスシミュレーション Vol.4, 2010.
- [2] HILBER, Hans M.; HUGHES, Thomas JR; TAYLOR, Robert L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1977, 5.3: 283-292.
- [3] 久田; 野口裕久. 非線形有限要素法の基礎と応用. (No Title), 1995.

※ 技術情報誌アドバンスシミュレーションは、それぞれの文献タイトルの下に記載した DOI から、PDF ファイル (カラー版) がダウンロードできます。また、本雑誌に記載された文献は、発行後に、JDREAMIII (日本最大級の科学技術文献情報データベース) に登録されます。