

# 音響解析の理論と数値計算法

代表取締役社長 松原 聖

音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise基礎セミナー  
2015年7月30日（木）  
アドバンスソフト株式会社

## 引き続き、当社からの説明内容

- 14:10～15:00  
→ 音響解析の原理と数値計算法
  - 15:10～15:30  
→ スパコンでの性能調査
  - 15:30～16:00  
→ 音響解析の原理と入出力データ
  - 16:00～16:20  
→ プリポストのご紹介
  - 16:20～16:30  
→ 各種ご案内
- ↑ ↓ 一般的な説明
- ↑ ↓ 【トピックス】  
スパコンとAdvance/FrontNoise
- ↑ ↓ 前半内容とAdvance/FrontNoise  
入出力データとの関係
- ↑ ↓ Advance/FrontNoiseの使い方

# 内容について

- 基礎方程式
  - 波の方程式、フーリエ変換、周波数領域、速度場、温度場
- 境界条件
  - 粒子速度、音圧、インピーダンス
- 音源
  - 点音源、面音源、線音源
- 数値解法
  - 有限要素法、線形方程式
- 音響解析ソフトウェアAdvance/FrontNoiseの機能

## 1. 基礎方程式

## 出発点 ; 波の方程式

### ■ 成分ごとの表示

$$\frac{dP}{dt} + \kappa \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

$$\rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$\rho \frac{dv}{dt} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$\rho \frac{dw}{dt} + \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

### ■ ベクトルでの表示

$$\frac{dP}{dt} + \kappa \cdot \text{div}(u) = 0$$

$$\rho \frac{du}{dt} + \text{grad}(P) = 0$$

### □ 室温空気では

$$\rho = 1.24 [\text{kg} / \text{m}^3]$$

$$c = 3.43 \times 10^2 [\text{m} / \text{sec}]$$

$$\kappa = \rho c^2$$

$$\kappa = 1.41 \times 10^5 [\text{kg} / \text{msec}^2]$$

## 基礎方程式 (時間領域)

### 時間領域での基礎方程式

$$\nabla^2 \Psi(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 V(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 P(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial t^2}$$

音響速度ポテンシャル  $\Psi(x, t)$

粒子速度  $V(x, t) = \text{grad}(\Psi(x, t))$

音圧  $P(x, t) = -\rho \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$

音圧レベル  $SPL = 10 \cdot \log \left( \frac{P}{P_0} \right)^2$   $P_0 = 2 \times 10^{-5} [\text{Pa}]$

## 基礎方程式(周波数領域へ変換)

$$\nabla^2 \Psi(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2}$$

定常的な波を仮定する。右式を代入する。  
 $\Psi(x,t) = \sum_{\nu=1,\infty} \varphi_{\nu}(x) e^{-i\omega t} \quad \omega = 2\pi\nu$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1,\infty} \nabla^2 \varphi_{\nu}(x) e^{-i\omega t} &= \frac{1}{c^2} \sum_{\nu=1,\infty} \varphi_{\nu}(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{-i\omega t} \\ &= - \sum_{\nu=1,\infty} \frac{\omega^2}{c^2} \varphi_{\nu}(x) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

↓ 各周波数を比較して

$$\nabla^2 \varphi(x) + k^2 \varphi(x) = 0 \quad k = \frac{2\pi\nu}{c}$$

※ φの添え字のνを省略した

## 定式化に関する符号に注意

項目	Advance/FrontNoise	別の定式化
参照した文献	Stephen Kirkup, "The Boundary Element Method in Acoustics," Integrated Sound Software(1998)	城戸健一, "基礎音響工学," コロナ社(1990)
基本とする式	$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{grad}(P) = 0$	$\frac{\partial P}{\partial t} + \kappa \cdot \text{div}(\mathbf{V}) = 0 \quad \kappa = \rho c^2$
フーリエ変換	$\mathbf{V} = \sum_j \mathbf{v}_j \exp(-i\omega_j t)$ $P = \sum_j p_j \exp(-i\omega_j t)$	$\mathbf{V} = \sum_j \mathbf{v}_j \exp(i\omega_j t)$ $P = \sum_j p_j \exp(i\omega_j t)$
vとpの関係	$i\omega\rho v = \nabla p$	$i\omega\rho v = -\nabla p$
速度ポテンシャルの表現	$v = \nabla \phi \quad p = i\omega\rho\phi$	$v = -\nabla \phi \quad p = i\omega\rho\phi$
右進行波	$\phi = B \exp(ikx)$	$\phi = A \exp(-ikx)$
左進行波	$\phi = A \exp(-ikx)$	$\phi = B \exp(ikx)$
右進行波に対するインピーダンス	$Z = \frac{p}{v} = \frac{i\omega\rho A \exp(ikx)}{ikA \exp(ikx)} = \rho c$	$Z = \frac{p}{v} = \frac{i\omega\rho A \exp(-ikx)}{-(-ikA \exp(-ikx))} = \rho c$
外向きインピーダンス		$\rho c$
BEMで利用される内向きインピーダンス		$-\rho c$

# 基礎方程式(周波数領域、速度なし)

## 周波数領域での基礎方程式

$$\nabla^2 \varphi(x) + k^2 \varphi(x) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$k = \frac{2\pi\nu}{c}$$

## 周波数領域での境界条件

$$\alpha(x)\varphi(x) + \beta(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} = f(x) \quad \text{on } \partial\Omega$$

# 基礎方程式(周波数領域、速度あり)

$$\frac{D_0}{Dt} \left( \frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{D_0 \Psi}{Dt} \right) - \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \Psi) = 0$$

Convected Wave Equation

$$\frac{D_0}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla$$

M.S.Howe, "Theory of Vertex Sound", Cambridge, 2003

$$\Psi(x, t) = \sum_{\nu=1, \infty} \varphi(x) e^{-i\nu t} \quad v_0 = (u, v, w)$$

$$(1 - M_x^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (1 - M_y^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (1 - M_z^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

$$M_x = \frac{u}{c}$$

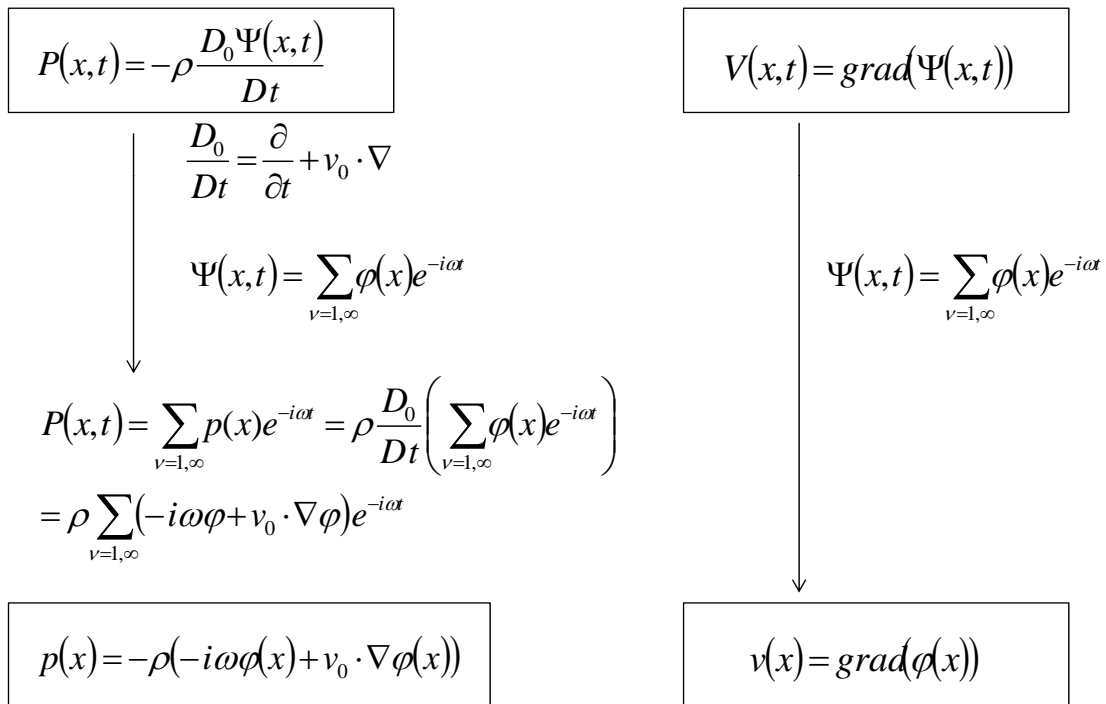
$$- \left( 2M_x M_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + 2M_y M_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + 2M_z M_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \right)$$

$$M_y = \frac{v}{c}$$

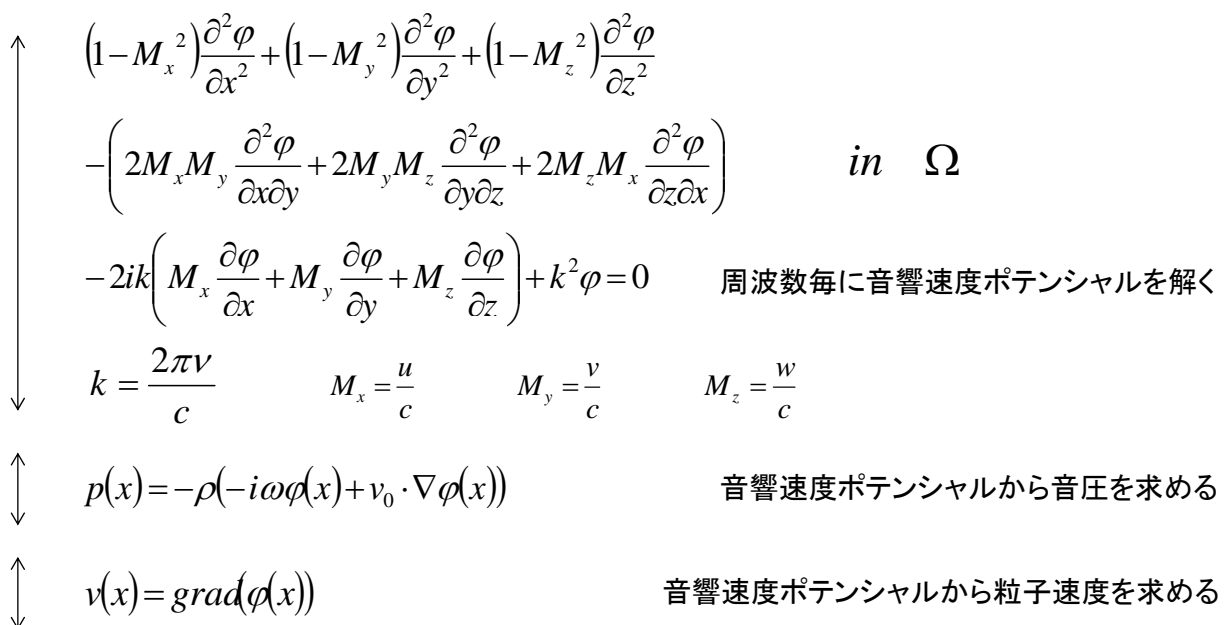
$$- 2ik \left( M_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + M_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + M_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + k^2 \varphi = 0$$

$$M_z = \frac{w}{c}$$

# 粒子速度と音圧(周波数領域、速度あり)



# 基礎方程式(周波数領域、まとめ)



※ 温度が分布を持つ場合には音速cが場所毎に変化する。

## 【参考】多孔質媒体の解析機能

- 一般的に、多孔質媒体の解析では、Mikiモデル等により音響伝播を複素数の音速および実効密度を与えて、音響解析を行う方法が利用されています。
- Advance/FrontNoiseでは、多孔質媒体の解析を主目的として音速および密度を解析領域のブロック(材質)毎に指定する機能があります。
- Advance/FrontNoiseでは、ブロック(材質)毎に複素数で音速および実効密度を定義します。

## 【参考】関連する基礎式

- 関連する基礎式は下記に示した3つの式のみである。
- 音速と密度を複素音速と実効密度に変更する。
- 物理的な要請は、音圧・密度が不連続に変化しても、音圧は連続となることである。
- 有限要素法では、速度ポテンシャルを基本変数とすると連続な速度ポテンシャルが解となる。その結果、音圧が不連続となる。これは物理的な要請を満たしていない。したがって、数値的には、若干の工夫が必要である。

$$\nabla^2 \varphi(x) + k^2 \varphi(x) = 0$$

$$p(x) = i\omega\rho^* \varphi(x)$$

$$k = \frac{2\pi f}{c^*}$$

## 【参考】Mikiモデル(利用を想定しているモデル)

- Mikiモデルは、さまざまな実験結果から、流れ抵抗 $\sigma$ をパラメータとして、特性インピーダンスと伝播定数の2つの量を周波数 $f$ の関数として表したものである。

$$z = \frac{Z_c}{\rho c} = R(f) + iX(f) \quad \gamma = \alpha(f) + i\beta(f)$$

$$R(f) = 1 + 0.070 \left( \frac{f}{\sigma} \right)^{-0.632} \quad \alpha(f) = \frac{\omega}{c} \left\{ 0.160 \left( \frac{f}{\sigma} \right)^{-0.618} \right\}$$

$$X(f) = -0.107 \left( \frac{f}{\sigma} \right)^{-0.632} \quad \beta(f) = \frac{\omega}{c} \left\{ 1 + 0.109 \left( \frac{f}{\sigma} \right)^{-0.618} \right\}$$

- Advance/FrontNoiseによる音響解析では、特性インピーダンス $z$ と伝播定数 $\gamma$ を、複素音速と実効密度に変換して利用します。

$$\rho^* = \frac{\rho c}{c^*} (R + iX) \quad \text{および、} \quad \gamma = ik^* \quad \text{から} \quad c^* = \frac{ic}{\alpha + i\beta}$$

## 2. 境界条件

## 境界条件の種類

周波数領域での境界条件(数学的には混合境界条件を与える)

$$\alpha(x)\varphi(x) + \beta(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} = f(x) \quad \text{on } \partial\Omega$$

下記の境界条件はどのように与えればいいのか？

- 境界での音源を音圧で与える
- 境界での音源を粒子速度で与える
- 境界での音源を粒子変位 or 粒子加速度で与える
- ◆ 境界のインピーダンスを与える
- ◆ 境界を完全反射とする
- ◆ 境界を完全吸収(無反射)とする

## 境界条件の利用方法

- 境界での音源
  - 境界での音源を音圧で与える。⇒スピーカーの音源や、流体音響連成における壁面の圧力として音源を与える場合に利用する
  - 境界での音源を粒子速度で与える。⇒壁面の振動を与える場合や、構造音響連成において壁面の振動条件を与える場合に利用する。
  - 境界での音源を粒子変位または粒子加速度で与える⇒。利用方法は上記粒子速度と同じ。
- 境界の反射条件
  - インピーダンスを与える境界条件⇒吸音面等に利用する。
  - 完全反射の境界条件⇒反射面に利用する。有限要素法では何も境界条件を指定しなければ完全反射境界となる。
  - 完全吸収(無反射)の境界条件⇒出口境界や外部境界に利用する。

## 境界条件一覧

$$\alpha(x)\varphi(x) + \beta(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} = f(x)$$

境界条件	$\alpha(x)$	$\beta(x)$	$f(x)$	備考
音圧	$i\omega\rho$	0	$-p_i(x)$	面音源
粒子速度	0	1	$v_i(x)$	面音源
粒子変位・加速度	0	1	$-i\omega u_i(x), -\frac{1}{i\omega}a_i(x)$	面音源
インピーダンス	$i\omega\rho$	$-Z$	0	吸音壁等
完全反射	0	1	0	デフォルト
完全吸収(無反射)	$i\omega\rho$	$\rho c$	0	$\rho c$ 境界

## 音圧の境界条件

$$\alpha(x)\varphi(x) + \beta(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} = f(x)$$

周波数毎に圧力を与える。または、時系列圧力をFourier変換して、その係数を与える。

$$P_0(x,t) = \sum_{\nu=1,\infty} p_i(x)e^{-i\alpha t}$$

音圧の定義より。

$$P_0(x,t) = -\rho \frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\sum_{\nu=1,\infty} i\omega\rho\varphi(x)e^{-i\alpha t}$$

両辺を比較する。

$$i\omega\rho\varphi(x) = -p_i(x)$$

混合境界条件に形式的に書き換えるとつぎの通り。

$$\alpha(x) = i\omega\rho \quad \beta(x) = 0 \quad f(x) = -p_i(x)$$

## 粒子速度の境界条件 $\alpha(x)\varphi(x) + \beta(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} = f(x)$

周波数毎に境界法線方向の速度を与える。または、境界法線方向の時系列速度をFourier変換して、その係数を与える。

$$V_0(x,t) = \sum_{\nu=1,\infty} v_i(x) e^{-i\alpha t}$$

音圧の定義より。

$$V(x,t) = \text{grad}(\Psi(x,t)) = \sum_{\nu=1,\infty} \text{grad}(\varphi(x)) e^{-i\alpha t}$$

境界の法線方向で両辺を比較する。

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} = v_i(x)$$

混合境界条件に形式的に書き換えるとなつぎの通り。

$$\alpha(x) = 0 \quad \beta(x) = 1 \quad f(x) = v_i(x)$$

## 粒子変位または加速度の境界条件

周波数毎に境界法線方向の変位または加速度を与える。または、境界法線方向の時系列変位 $U_0$ または加速度 $A_0$ をFourier変換して、その係数を与える。

$$U_0(x,t) = \sum_{\nu=1,\infty} u_i(x) e^{-i\alpha t}$$

$$V_0(x,t) = \frac{\partial U_0(x,t)}{\partial t} = \sum_{\nu=1,\infty} (-i\omega u_i(x)) e^{-i\alpha t}$$

$$v_i(x) = -i\omega u_i(x)$$

速度の境界条件  
に入れる。

加速度も同様に下記の通り。

$$A_0(x,t) = \sum_{\nu=1,\infty} a_i(x) e^{-i\alpha t} \quad v_i(x) = -\frac{1}{i\omega} a_i(x)$$

## インピーダンスを与える境界条件

インピーダンスは、つぎの定義である。

$$Z = \frac{p}{v} = \frac{i\omega\rho\phi(x)}{\frac{\partial\phi(x)}{\partial n}}$$

両辺を比較する。

$$Z \frac{\partial\phi(x)}{\partial n} = i\omega\rho\phi(x)$$

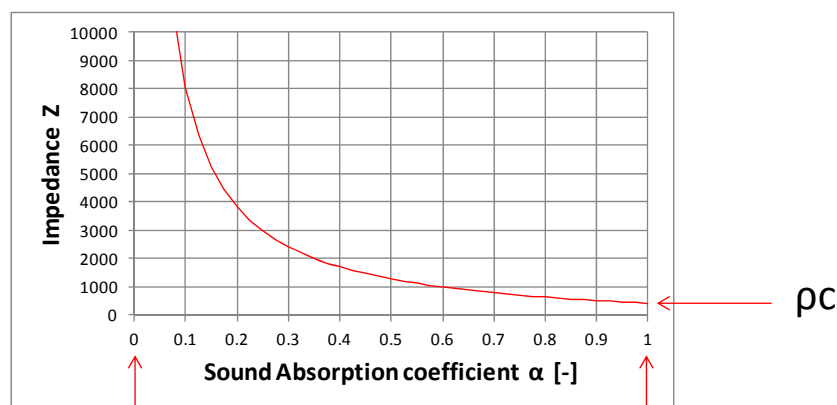
混合境界条件に形式的に書き換えるとつぎの通り。

$$\alpha(x)\phi(x) + \beta(x) \frac{\partial\phi(x)}{\partial n} = f(x) \quad \text{on } \partial\Omega$$

$$\alpha(x) = i\omega\rho \quad \beta(x) = -Z \quad f(x) = 0$$

## 【参考】吸音率 $\alpha$ と反射率 $R$ とインピーダンス $Z$

$$\alpha = 1 - R \quad R = \frac{Z - \rho c}{Z + \rho c} \quad \begin{array}{l} \rho = 1.24 [kg/m^3] \\ c = 3.43 \times 10^2 [m/sec] \end{array}$$



完全反射

吸収(無反射)

## 完全反射の境界条件 $\alpha(x)\varphi(x) + \beta(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} = f(x)$

インピーダンスが $\infty$ のケースである。

$$Z = \infty$$

インピーダンス境界の条件を $-Z$ で割ると下記の通り。

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} = 0$$

$$\alpha(x) = 0 \quad \beta(x) = 1 \quad f(x) = 0$$

※有限要素法で何も設定しない境界に対する境界条件となる。そのような背景から、本プログラムでは、この条件がデフォルトとなる。すなわち、何も指定しなければ、完全反射の境界条件となる。

## 完全吸収(無反射)の境界条件

$\rho c$ 境界(1次元で完全吸収となる条件)を与える。  
3次元では完全吸収条件の近似とすることができる。

$$Z = \rho c$$

※  $\rho c$ 境界の根拠は下記の通り

$$\nabla^2\varphi(x) + k^2\varphi(x) = 0 \quad \text{基礎方程式}$$

$$\varphi(x) = \cos(kx) + i\sin(kx) \quad \text{1次元の解析解}$$

$$Z = \frac{i\omega\rho\varphi(x)}{\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}} = \frac{i\omega\rho(\cos(kx) + i\sin(kx))}{(-k\sin(kx) + ik\cos(kx))} = \frac{i\omega\rho(\cos(kx) + i\sin(kx))}{ik(i\sin(kx) + \cos(kx))} = \frac{i\omega\rho}{i\left(\frac{\omega}{c}\right)} = \rho c$$

1次元の解析解は任意の点でこの式を満たす。

## 3. 音源

## 音源の種類

- 点音源
  - 音源の大きさが波長に比べて十分に小さい音源
  - 点音源から放射された音波は球面状に伝播
  - 各点の音の強さは、音源からの距離の2乗に反比例する
- 線音源
  - 音源の厚みが波長に比べて十分に小さい線状の音源
  - 無限に長い均一な線音源から放射された音波は円筒状に伝播
  - 各点の音の強さは、音源からの距離に反比例する
- 面音源
  - 平面的な広がりをもった音源
  - 無限に広い均一な面音源から放射された音波は平面状に伝播
  - 各点の音の強さは、減衰しない

# 点音源の定式化

$$\nabla^2 \phi(x) + k^2 \phi(x) = 0$$

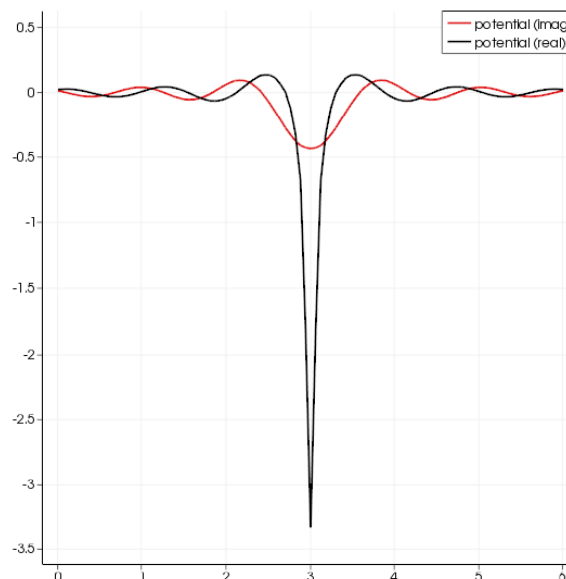
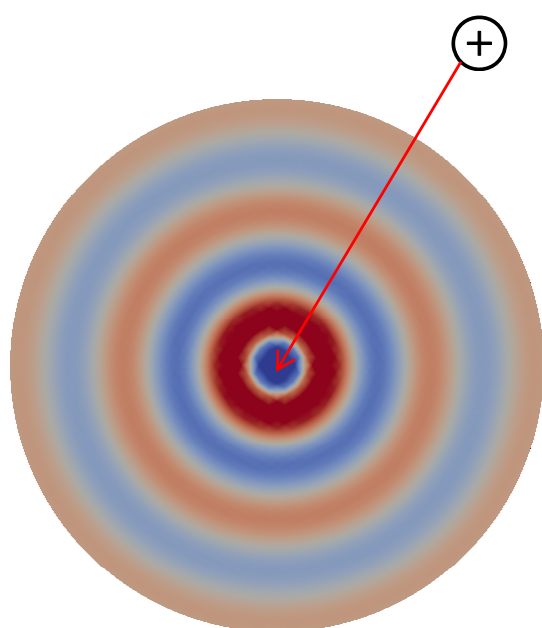


$$\nabla^2 \phi(x) + k^2 \phi(x) = q_0 \delta(x - x_0)$$

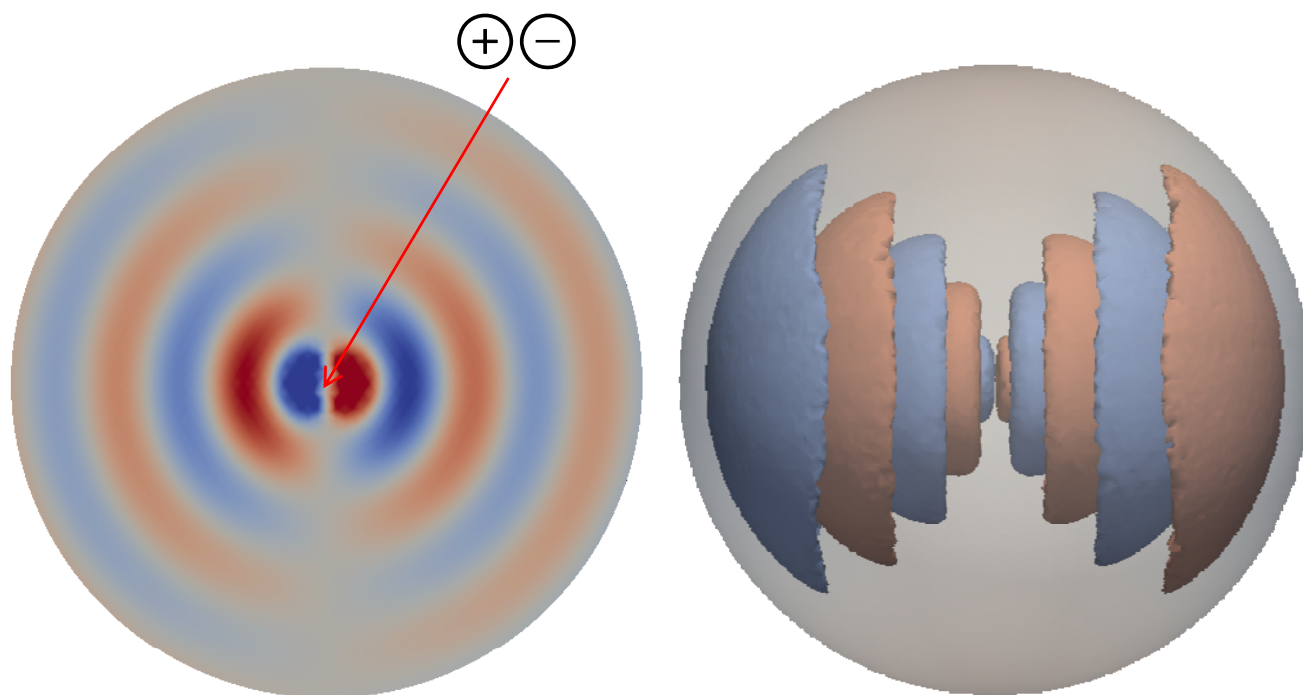
$q_0$  は体積速度であり、単位は  $m^3 / \text{sec}$

$$\int_{\Omega_{|x-x_0|<\varepsilon}} \{ \nabla^2 \phi(x) + k^2 \phi(x) \} dv = q_0$$

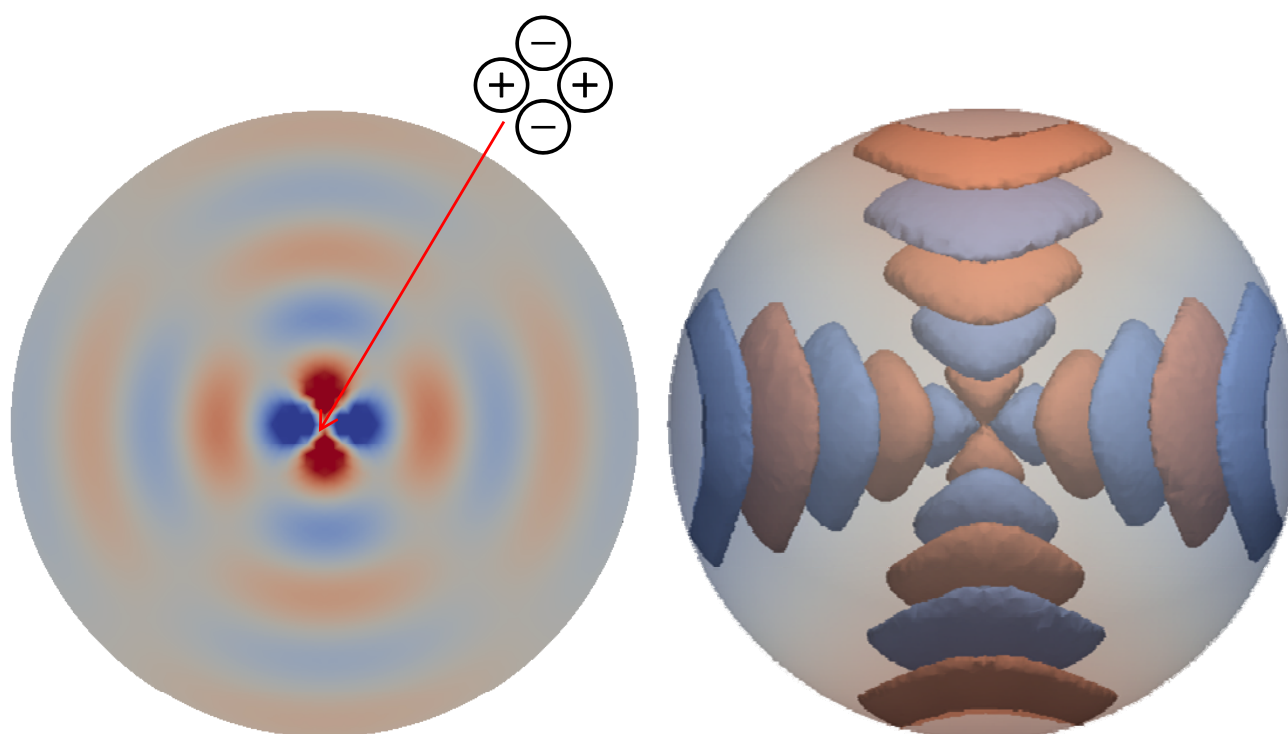
# 無限に広い空間中のひとつの点音源



# 無限に広い空間中のふたつの点音源



# 無限に広い空間中の4つの点音源



# 面音源の定式化

※ 前節で述べた境界条件として下記の条件を与える。

面に音圧を与える

$$i\omega\rho\phi(x) = -p_i(x)$$

面に粒子速度を与える

$$\frac{\partial\phi(x)}{\partial n} = v_i(x)$$

(面に粒子変位を与える)

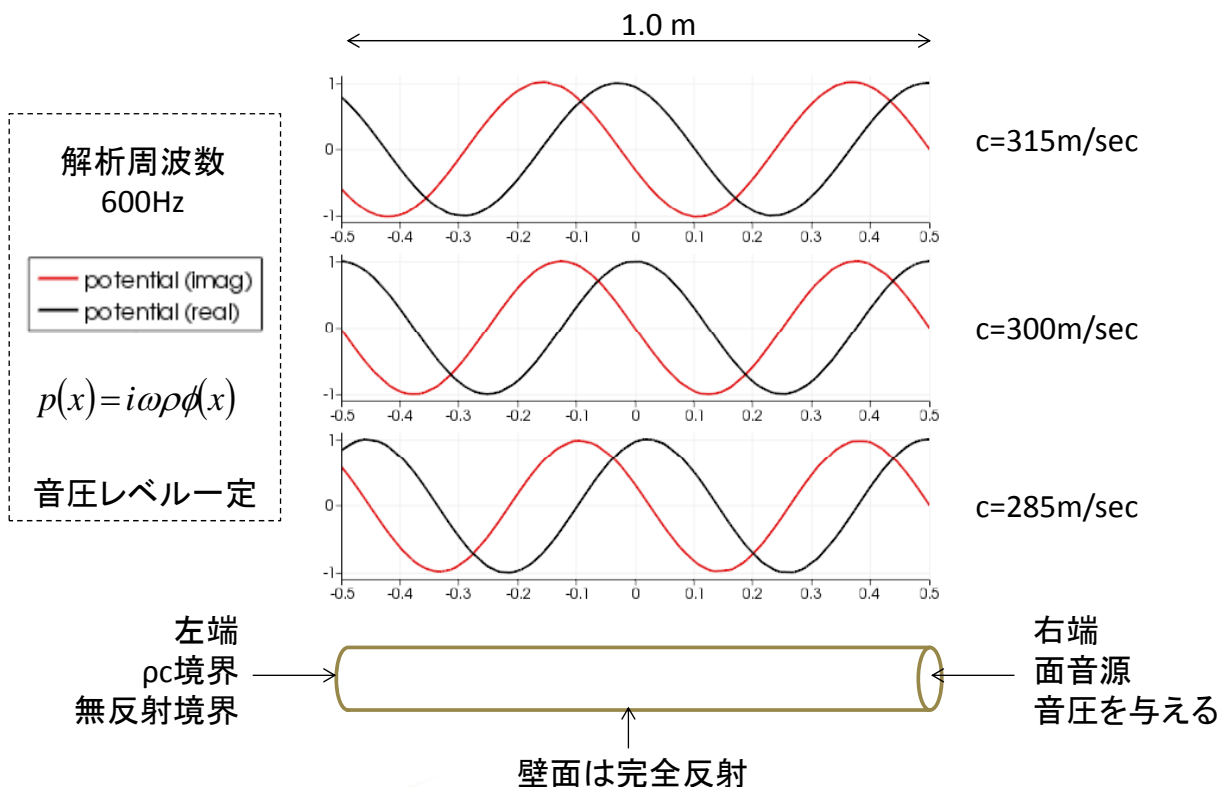
$$\frac{\partial\phi(x)}{\partial n} = -i\omega u_i(x)$$

(面に粒子加速度を与える)

$$\frac{\partial\phi(x)}{\partial n} = -\frac{1}{i\omega} a_i(x)$$

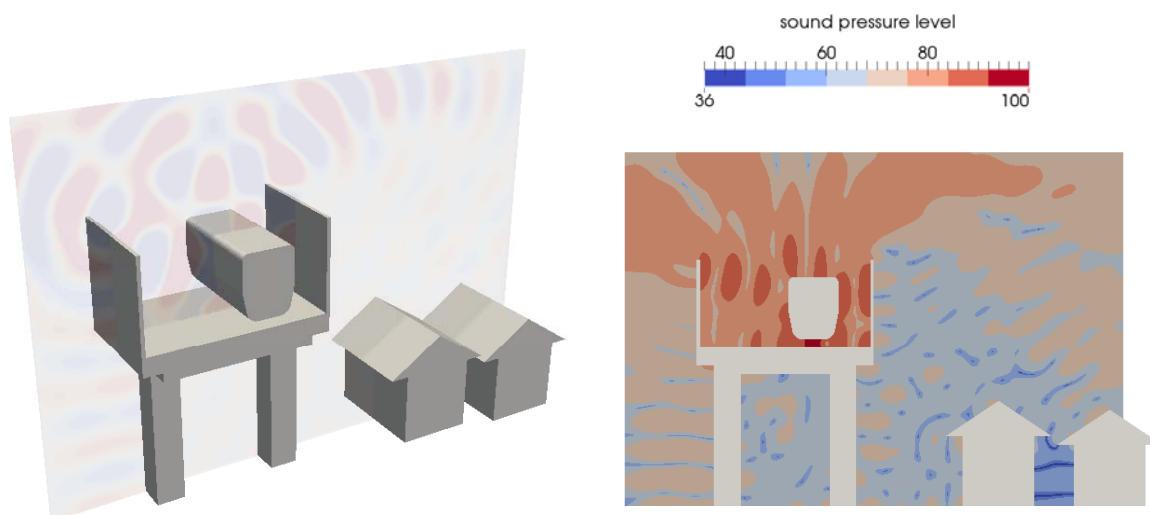
壁面の場所毎に振幅や位相の異なる振動を与え、音源とすることができる。

# 面音源の使用例



## 線音源

- 列車の通過する高架橋の騒音解析において、計算資源の節約のため2次元解析を行った。列車の車輪に設置した音源は、結果的に線音源となっている。



## 4. 数値解法

## 有限要素法と境界要素法

比較項目	有限要素法	境界要素法
処理速度	○	△
使用記憶容量	○	△
放射問題対応	△	◎
非均一媒体	○	×
定式化	容易	難解
境界条件モデル化	容易	難解

## 有限要素法の定式化 (Advance/FrontNoiseの例)

- 四面体1次要素を利用する。音響問題に対して、四面体の高次要素や六面体要素を利用するメリットはない。
  - 形状適合性が高く、容易にメッシュを作成することが可能である。
  - 問題規模は要素数ではなく節点数に依存するため、処理時間で四面体が不利になることはない
  - 四面体1次要素で十分な精度を得ることができる(精度については検証済みである)。
- 境界条件は、音響速度ポテンシャルに対する混合境界条件を利用する。
  - 各種の壁の境界条件を表現できる。
  - 各種面音源を表現できる。
- 点音源を外力項として与える。

## 有限要素法での離散化(基礎方程式)

$$\text{div}(\text{grad}\varphi(x)) + k^2\varphi(x) = 0 \quad \longleftarrow \quad \nabla^2\varphi(x) + k^2\varphi(x) = 0$$

$$\downarrow$$

$$N_j(x)\text{div}(\text{grad}\varphi(x)) + k^2N_j(x)\varphi(x) = 0 \quad \text{四面体一次要素の形状関数を乗ずる}$$

$$\downarrow$$

$$\int_{\Omega} N_j(x)\text{div}(\text{grad}\varphi(x))dv + \int_{\Omega} k^2N_j(x)\varphi(x)dv = 0 \quad \text{要素内で積分する}$$

$$\int_{\Omega} \text{div}(N_j(x)\text{grad}\varphi(x))dv = \int_{\Omega} \text{grad}(N_j(x))\text{grad}\varphi(x)dv + \int_{\Omega} N_j(x)\text{div}(\text{grad}\varphi(x))dv$$

積の微分公式

$$\int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{A})dv = \int_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}ds \quad \text{発散定理}$$

$$\downarrow$$

$$-\int_{\Omega} \text{grad}(N_j(x))\text{grad}\varphi(x)dv + \int_{\Omega} k^2N_j(x)\varphi(x)dv = -\int_{\partial\Omega} N_j(x)\text{grad}\varphi(x)\mathbf{n}ds \quad (\text{部分積分})$$

$$\downarrow$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1,4} \varphi_i N_i(x) \quad \text{節点の離散値と形状関数を適用した近似}$$

$$\downarrow$$

$$-\sum_{i=1,4} \varphi_i \int_{\Omega} \text{grad}(N_j(x))\text{grad}(N_i(x))dv + k^2 \sum_{i=1,4} \varphi_i \int_{\Omega} N_j(x)N_i(x)dv = -\int_{\partial\Omega} N_j(x)\text{grad}\varphi(x)\mathbf{n}ds$$

## 有限要素法での離散化(境界条件)

$$-\sum_{i=1,4} \varphi_i \int_{\Omega} \text{grad}(N_j(x))\text{grad}(N_i(x))dv + k^2 \sum_{i=1,4} \varphi_i \int_{\Omega} N_j(x)N_i(x)dv = -\int_{\partial\Omega} N_j(x)\text{grad}\varphi(x)\mathbf{n}ds$$

前ページで変形した式の右辺を求める

右辺に境界条件を代入

$\beta=0$ の場合はディリクレ境界となり、もっと簡単な別処理へ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{f}{\beta} - \frac{\alpha\varphi}{\beta} \quad \longleftarrow \quad \alpha\varphi + \beta \frac{\partial\varphi}{\partial n} = f$$

$$-\int_{\partial\Omega} N_j(x)\text{grad}\varphi(x)\mathbf{n}ds = -\int_{\partial\Omega} N_j(x) \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds = -\int_{\partial\Omega} N_j(x) \left( \frac{f}{\beta} - \frac{\alpha\varphi}{\beta} \right) ds$$

$$\downarrow$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1,4} \varphi_i N_i(x) \quad \text{節点の離散値と形状関数を適用した近似}$$

$$-\int_{\partial\Omega} N_j(x)\text{grad}\varphi(x)\mathbf{n}ds = -\frac{f}{\beta} \int_{\partial\Omega} N_j(x)ds + \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i=1,4} \varphi_i \int_{\partial\Omega} N_j(x)N_i(x)ds$$

# 有限要素法での離散化(形状関数)

四面体一次要素の定義

$$N_j(x, y, z) = a_j x + b_j y + c_j z + d_j$$

形状関数の定義 (節点で成立)  $N_j(x_i, y_i, z_i) = \delta_{ij}$

$$a_i x_1 + b_i y_1 + c_i z_1 + d_i = \delta_{1i}$$

第1・2式より  $a_i x_2 + b_i y_2 + c_i z_2 + d_i = \delta_{2i}$

a,b,c,dを求める  $a_i x_3 + b_i y_3 + c_i z_3 + d_i = \delta_{3i}$

$$a_i x_4 + b_i y_4 + c_i z_4 + d_i = \delta_{4i}$$

第1式より  $grad(N_j(x)) = \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{pmatrix}$



$$\int_{\Omega} grad(N_j(x)) grad(N_i(x)) dv = (a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j) V$$

$$\int_{\Omega} N_j(x) N_i(x) dv = \begin{cases} \frac{V}{10} & i = j \\ \frac{V}{20} & i \neq j \end{cases}$$

$$\int_{\partial\Omega} N_j(x) ds = \frac{1}{3} S$$

$$\int_{\partial\Omega} N_j(x) N_i(x) ds = \begin{cases} \frac{S}{6} & i = j \\ \frac{S}{12} & i \neq j \end{cases}$$

VはΩの体積、Sは∂Ωの面積

# 有限要素法での離散化(結論)

$$-\sum_{i=1,4} \varphi_i \int_{\Omega} grad(N_j(x)) grad(N_i(x)) dv + k^2 \sum_{i=1,4} \varphi_i \int_{\Omega} N_j(x) N_i(x) dv$$

$$= -\frac{f}{\beta} \int_{\partial\Omega} N_j(x) ds + \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i=1,4} \varphi_i \int_{\partial\Omega} N_j(x) N_i(x) ds$$

← 前ページまでをまとめた

$$a_{ij} = -\int_{\Omega} grad(N_j(x)) grad(N_i(x)) dv + k^2 \int_{\Omega} N_j(x) N_i(x) dv$$

$$a_{ij} = \frac{\alpha}{\beta} \int_{\partial\Omega} N_j(x) N_i(x) ds$$

$$b_i = -\frac{f}{\beta} \int_{\partial\Omega} N_j(x) ds$$

$$\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_i \end{pmatrix}$$

行列のサイズは節点の数と等しい  
行列の要素は複素数

## 他の機能に関する離散化

- 【速度場のある場合】式が複雑になるだけで、同様の方針で離散化できる。ここでは、速度場は要素に与えることが自然な方法となる。
- 【温度場のある場合】 $k$ を場所の温度に依存して変化させる。したがって、温度場は要素に与えることが自然である。
- 【多孔質媒体の場合】密度と音速は、モデル式で計算された複素数となる。
- 【構造音響強連成の場合】(本日は説明をしていないが)少し複雑な式となる(前回セミナーで説明)。しかし、基本は同様の離散化となり、考え方が大きく変わるわけではない。

## 大規模複素係数線形方程式の解法

- ひとつの周波数に対して、1回の線形方程式を解く必要がある。係数行列も周波数毎にその値が異なる。
- 係数行列は疎行列である。計算効率向上のため専用のデータ構造が必要である。周波数毎に疎行列パターンは同じ。
- 大規模問題を想定して線形方程式は疎行列用反復解法を適用する(計算資源の有効利用)。100万節点以下については、疎行列用直接法も適用可能である(計算資源の限度)。
- 疎行列用反復法は前処理と合わせて、いくつかの組み合わせをテストし、最終的には、反復法はGMRES系列、それと相性のいい前処理としてILU系列またはMG系列を利用することが最適であることを確認した。

## 有限要素法を採用した経緯

- Advance/FrontNoise Ver1.0(2006.03)は、境界要素法BEMによる定式化を利用して開発した。また、当初から大規模計算を目指して並列処理のプログラムとして開発した。
- しかし、BEMの処理時間では、境界節点1万点でほぼ限界となり、また、処理時間は節点数の3乗に比例するため、将来的な発展を見込むことができなくなった。
- 有限要素法FEMの定式化で開発を行い、精度と処理時間の比較等を行った(2007.03)。その結果、精度は同等で、処理時間が圧倒的に速かった。
- そこで、有限要素法をVer2.0から採用することとした。

## 数値解法のまとめ

- 離散化
  - 有限要素法を適用して離散化する。
  - 離散化した基礎方程式は、複素係数の大規模連立一次方程式となる。複素数の変数の数は、節点数と等しい。
- 線形方程式
  - ひとつの周波数に対して、1回の線型方程式を解く。
  - 線形方程式は疎行列用反復解法を適用する。100万節点以下については疎行列用直接法も適用可能である。
- 並列化
  - 疎行列用反復解法の処理を中心に並列化できる。
  - 大規模問題に適用できるデータ構造とすることが必須である。
  - 並列化で利用する領域分割は、ユーザが意識する必要はない。

## 5. Advance/FrontNoiseの機能

## Advance/FrontNoiseで可能な音響解析

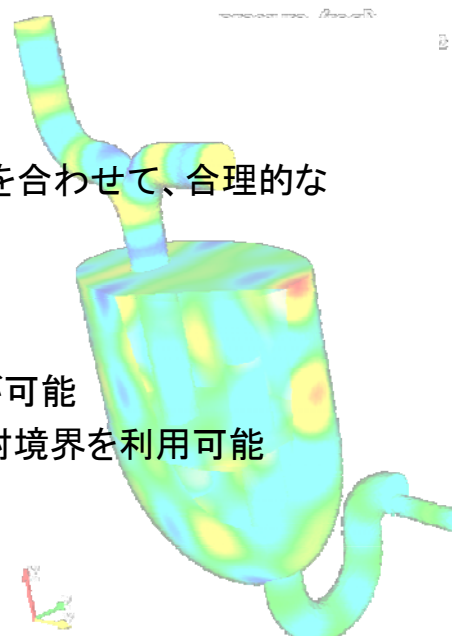
- 音の伝播する領域、解析対象とする周波数を定め、周波数領域での解析を行います。
- その領域に有限要素のメッシュを作成します。境界条件として、解析領域内の**音源の周波数と強さを与えます**。また、壁等には適切な境界条件を与えます。
- 指定された周波数に対して、解析領域内すべての点における音響速度ポテンシャル(音圧、粒子速度)を求めることができます。
- 解析の後処理として、空間の音圧レベルや対象機器の透過損失等を求めることなどができます。
- これらの処理を必要とする周波数の数だけ解析を行います。
- **一般的に音源が不明な場合(音源を与えることができない場合)には音響解析はできません。**

## ソフトウェアの機能

項目	内容	
基礎方程式	(1) 音響速度ポテンシャルに関する波の方程式を周波数空間に変換した方程式 (2) 空間的に分布する場の流れおよび空間的に分布する温度を考慮可能 (3) 空間的に分布する多孔質音響伝播媒体を考慮可能 (4) 構造物の固有値解析結果を利用した構造音響連成透過音解析が可能	
解析領域	内部領域、および、外部領域(外部領域での外部境界は $\rho c$ 境界で与える)	
物性値等	速度	場の速度を指定可能(デフォルト:速度0)
	温度	場の温度(音の伝播媒体)を要素毎に指定することが可能(デフォルトは均一媒体)
	多孔質	多孔質を模擬した場の材質を指定することが可能
境界条件	面での音源	面(壁境界)に対して、周波数毎に音圧または粒子速度を設定可能
	点音源	節点に対して、単極子、双極子、または、四重極子のパラメータを設定可能
	音響インピーダンス	面(壁境界)に対して、周波数毎に音響インピーダンスを設定可能
	外部境界	面(外部境界)に対して、 $\rho c$ 境界を設定可能(音響インピーダンスを与える機能の一部)
数値解法	離散化手法	有限要素法
	利用可能な要素	四面体一次要素
	並列計算	自動領域分割によりMPIで並列化
	行列解法	GMRES系列の反復法をデフォルトとし、各種反復手法および前処理手法が利用可能
	大規模計算実績	4億要素・8000万節点(四面体一次要素)
解析結果	周波数毎の音響ポテンシャル、音圧、音圧レベルを、バイナリ形式でファイル出力	
プリポスト	Advance/REVOCAP for FrontNoise	

## Advance/FrontNoiseの特長

- 大規模高速計算のさらなる強化
  - 最大規模では、テトラ4億要素(7500万節点、15000万自由度)の解析実績
  - 並列手法は、領域分割を利用可能
- 合理的な価格
  - プリポストとソルバ並列計算無制限版を合わせて、合理的な年間ライセンスでご提供
  - 必要に応じて、ソルバのみもご提供
- その他の特長
  - 温度場、流れ場を考慮した音響解析が可能
  - 周波数依存性のある境界条件、無反射境界を利用可能
  - 形状適合性の高いテトラ要素を採用



# 専用プリポスト Advance/REVOCAP for FrontNoise

- Advance/FrontNoiseと一体化したプリポストを2013年7月にリリース。
- 音響解析ではほぼ均一なメッシュを作成することが多い。Advance/REVOCAPの自動メッシュの機能は、音響解析には非常に適合性が高い。
- 形状適合性の高い四面体ソルバ用のプリポストである。
- 境界条件設定作業が効率的に可能である。

のちほど詳細な説明をいたします

## Advance/FrontNoise概要のまとめ

- 音響解析の基礎について説明しました。
  - 音響の基礎方程式を示しました。
  - 境界条件および音源項を示しました。
  - 有限要素法について説明しました。
  - 離散化手法および線形方程式の解法を示しました。
- Advance/FrontNoiseの機能について説明しました。