

ADI-FDTD法（交互方向陰解法型－時間領域差分法）の概要

並木 武文*

Description of Alternating Direction Implicit Finite Difference Time Domain Method

Takefumi Namiki*

Maxwell 方程式を解く一手法として、FDTD 法（時間領域差分法）がよく知られている。FDTD 法は、Maxwell 方程式を時間と空間について差分法で解く手法であるが、陽解法型差分法であるため、CFL(Courant-Friedrichs-Lewy)条件の制約を受ける。このため、解析領域の最小格子間隔によって時間刻み幅の上限が決定されてしまい、解析対象に微細な格子間隔を設定する場合に計算時間が著しく増加してしまうことがある。

この課題に対処する手法として、筆者が発明した CFL 条件の制約を受けない ADI-FDTD 法（交互方向陰解法型－時間領域差分法）がある。本稿では、この ADI-FDTD 法の概要について解説する。

Key word: Maxwell 方程式、FDTD 法、時間領域、差分法、ADI-FDTD 法、交互方向陰解法

1. はじめに

Maxwell 方程式を解く手法として、モーメント法、有限要素法、FDTD 法（時間領域差分法）などがよく知られている。これらの中でも FDTD 法 [1] [2] は、その基本アルゴリズムが簡潔明瞭である上に適用範囲が多岐にわたることから、計算手法に関する研究やさまざまな分野での適用事例が数多く発表されてきている。また、当社の電磁波解析ソフトウェア Advance/ParallelWave のような商用ソフトウェアにおける解析手法としても用いられている。

FDTD 法は、Maxwell 方程式を時間と空間について差分法で解く手法であるが、時間積分手法としては陽解法型差分法であるため、CFL (Courant-Friedrichs-Lewy)条件の制約を受ける条件付き安定アルゴリズムである。このため、解析領域の最小格子間隔によって時間刻み幅の上限が決定されてしまい、解析対象に微細な格子間隔を設定する場合に、計算時間が著しく増加してしまうことがある。

筆者は、この課題を解決する目的で研究をはじめ、その成果を、CFL 条件の制約を受けない無条件安定な ADI-FDTD 法 (Alternating Direction Implicit Finite Difference Time Domain Method / 交互方向陰解法型－時間領域差分法) [3] [4] として 1999～2000 年に発表した。これらの論文の被引用件数は、それぞれ 600 件および 238 件（2018 年 6 月現在）に上り、多くの研究者にインパクトを与える結果となった。そして、関連するさまざまな研究が発表されてきている。

本稿では、この ADI-FDTD 法の概要について解説するとともに、本手法による計算時間の短縮効果が顕著な計算事例を示す。

2. 基礎方程式と定式化

ADI-FDTD 法の基礎方程式は、FDTD 法と同様式(1)(2)に示した Maxwell 方程式の回転の式である。

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \sigma \vec{E}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (1)$$

$$\mu \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (2)$$

ここで、諸量の定義は次の通りである。

*アドバンスソフト株式会社 第 1 事業部
Computational Science and Engineering Division I,
AdvanceSoft Corporation

$\vec{E}$	電界ベクトル
$\vec{H}$	磁界ベクトル
$\vec{r}$	空間座標
t	時刻
ε	誘電率
σ	導電率
μ	透磁率

これらの偏微分方程式を、時間と空間について差分法で解くために、3次元空間を図1左のような直交差分格子で分割する。この場合、格子間隔は不均一でも構わない。さらに、電磁界成分を差分格子の上に図1右のように配置する。媒質定数（誘電率、導電率、透磁率）は、各格子（図1左における個々の直方体）に設定する。

これらについても、ADI-FDTD法とFDTD法は全く同様である。

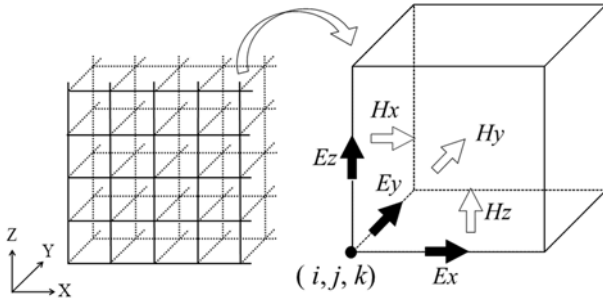


図1 ADI-FDTD法の差分格子と電磁界配置

以下に、直交座標系における等方性無分散媒質に対するADI-FDTD法の定式化を示す。

初めに式(1)について定式化する。ここで、電界のx成分の時間微分について記述すると式(3)のようになる。

$$\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (3)$$

式(3)において、時間を1ステップ進める工程を2段階に分割し、差分表記して整理すると式(4)のようになる。電界および磁界の時刻表記インデックスに注意されたい。

式(4a)は、格子点 $(i+1/2, j, k)$ に位置する時刻 $n+1/2$ の電界のx成分が、同じ格子点に位置する時刻 n の電界のx成分の値と、隣接する格子点に位置す

る時刻 n の磁界のz成分および時刻 $n+1/2$ の磁界のy成分の値によって更新されることを意味している。

$$E_x^{n+1/2} = C a_{(i+1/2, j, k)} \cdot E_x^n + C b_{(i+1/2, j, k)} \cdot \left[\left\{ H_z^n_{(i+1/2, j+1/2, k)} - H_z^n_{(i+1/2, j-1/2, k)} \right\} / \Delta y - \left\{ H_y^{n+1/2}_{(i+1/2, j, k+1/2)} - H_y^{n+1/2}_{(i+1/2, j, k-1/2)} \right\} / \Delta z \right] \quad (4a)$$

$$E_x^{n+1} = C a_{(i+1/2, j, k)} \cdot E_x^{n+1/2} + C b_{(i+1/2, j, k)} \cdot \left[\left\{ H_z^{n+1}_{(i+1/2, j+1/2, k)} - H_z^{n+1}_{(i+1/2, j-1/2, k)} \right\} / \Delta y - \left\{ H_y^{n+1/2}_{(i+1/2, j, k+1/2)} - H_y^{n+1/2}_{(i+1/2, j, k-1/2)} \right\} / \Delta z \right] \quad (4b)$$

ここで

$$C a_{(i+1/2, j, k)} = \frac{2\varepsilon_{(i+1/2, j, k)} - \sigma_{(i+1/2, j, k)} \Delta t}{2\varepsilon_{(i+1/2, j, k)} + \sigma_{(i+1/2, j, k)} \Delta t}$$

$$C b_{(i+1/2, j, k)} = \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_{(i+1/2, j, k)} + \sigma_{(i+1/2, j, k)} \Delta t}$$

式(4b)は、格子点 $(i+1/2, j, k)$ に位置する時刻 $n+1$ の電界のx成分が、同じ格子点に位置する時刻 $n+1/2$ の電界のx成分の値と、隣接する格子点に位置する時刻 $n+1$ の磁界のz成分および時刻 $n+1/2$ の磁界のy成分の値によって更新されることを意味している。

なお、電界のy、z成分についても、それぞれ式(5)、(6)のように定式化される。

$$E_y^{n+1/2} = C a_{(i, j+1/2, k)} \cdot E_y^n + C b_{(i, j+1/2, k)} \cdot \left[\left\{ H_x^n_{(i, j+1/2, k+1/2)} - H_x^n_{(i, j+1/2, k-1/2)} \right\} / \Delta z - \left\{ H_z^{n+1/2}_{(i+1/2, j+1/2, k)} - H_z^{n+1/2}_{(i-1/2, j+1/2, k)} \right\} / \Delta x \right] \quad (5a)$$

$$E_y^{n+1} = C a_{(i, j+1/2, k)} \cdot E_y^{n+1/2} + C b_{(i, j+1/2, k)} \cdot \left[\left\{ H_x^{n+1}_{(i, j+1/2, k+1/2)} - H_x^{n+1}_{(i, j+1/2, k-1/2)} \right\} / \Delta z - \left\{ H_z^{n+1/2}_{(i+1/2, j+1/2, k)} - H_z^{n+1/2}_{(i-1/2, j+1/2, k)} \right\} / \Delta x \right] \quad (5b)$$

$$E_z^{n+1/2} = C a_{(i, j, k+1/2)} \cdot E_z^n + C b_{(i, j, k+1/2)} \cdot \left[\left\{ H_y^n_{(i+1/2, j, k+1/2)} - H_y^n_{(i-1/2, j, k+1/2)} \right\} / \Delta x - \left\{ H_x^{n+1/2}_{(i, j+1/2, k+1/2)} - H_x^{n+1/2}_{(i, j-1/2, k+1/2)} \right\} / \Delta y \right] \quad (6a)$$

$$Ez_{(i,j,k+1/2)}^{n+1} = Ca_{(i,j,k+1/2)} \cdot Ez_{(i,j,k+1/2)}^{n+1/2} + Cb_{(i,j,k+1/2)} \cdot \left[\left\{ Hy_{(i+1/2,j,k+1/2)}^{n+1} - Hy_{(i-1/2,j,k+1/2)}^{n+1} \right\} / \Delta x - \left\{ Hx_{(i,j+1/2,k+1/2)}^{n+1/2} - Hx_{(i,j-1/2,k+1/2)}^{n+1/2} \right\} / \Delta y \right] \quad (6b)$$

次に、式(2)について定式化する。ここで、磁界の x 成分の時間微分について記述すると式(7)のようになる。

$$\mu \frac{\partial Hx}{\partial t} = \frac{\partial Ey}{\partial z} - \frac{\partial Ez}{\partial y} \quad (7)$$

式(7)において、時間を 1 ステップ進める工程を 2 段階に分割し、差分表記して整理すると式(8)のようになる。

式(8a)は、格子点 $(i, j+1/2, k+1/2)$ に位置する時刻 $n+1/2$ の磁界の x 成分が、同じ格子点に位置する時刻 n の磁界の x 成分の値と、隣接する格子点に位置する時刻 n の電界の y 成分および時刻 $n+1/2$ の電界の z 成分の値によって更新されることを意味している。

$$Hx_{(i,j+1/2,k+1/2)}^{n+1/2} = Hx_{(i,j+1/2,k+1/2)}^n + Db_{(i,j+1/2,k+1/2)} \cdot \left[\left\{ Ey_{(i,j+1/2,k+1)}^n - Ey_{(i,j+1/2,k)}^n \right\} / \Delta z - \left\{ Ez_{(i,j+1,k+1/2)}^{n+1/2} - Ez_{(i,j,k+1/2)}^{n+1/2} \right\} / \Delta y \right] \quad (8a)$$

$$Hx_{(i,j+1/2,k+1/2)}^{n+1} = Hx_{(i,j+1/2,k+1/2)}^{n+1/2} + Db_{(i,j+1/2,k+1/2)} \cdot \left[\left\{ Ey_{(i,j+1/2,k+1)}^{n+1} - Ey_{(i,j+1/2,k)}^{n+1} \right\} / \Delta z - \left\{ Ez_{(i,j+1,k+1/2)}^{n+1/2} - Ez_{(i,j,k+1/2)}^{n+1/2} \right\} / \Delta y \right] \quad (8b)$$

ここで

$$Db_{(i,j+1/2,k+1/2)} = \frac{\Delta t}{\mu_{(i,j+1/2,k+1/2)}}$$

式(8b)は、格子点 $(i, j+1/2, k+1/2)$ に位置する時刻 $n+1$ の磁界の x 成分が、同じ格子点に位置する時刻 $n+1/2$ の磁界の x 成分の値と、隣接する格子点に位置する時刻 $n+1$ の電界の y 成分および時刻 $n+1/2$ の電界の z 成分の値によって更新されることを意味している。

なお、磁界の y 成分、 z 成分についても、それぞれ式(9)、(10)のように定式化される。

$$Hy_{(i+1/2,j,k+1/2)}^{n+1/2} = Hy_{(i+1/2,j,k+1/2)}^n + Db_{(i+1/2,j,k+1/2)} \cdot \left[\left\{ Ez_{(i+1,j,k+1/2)}^n - Ez_{(i,j,k+1/2)}^n \right\} / \Delta x - \left\{ Ex_{(i+1/2,j,k+1)}^{n+1/2} - Ex_{(i+1/2,j,k)}^{n+1/2} \right\} / \Delta z \right] \quad (9a)$$

$$Hy_{(i+1/2,j,k+1/2)}^{n+1} = Hy_{(i+1/2,j,k+1/2)}^{n+1/2} + Db_{(i+1/2,j,k+1/2)} \cdot \left[\left\{ Ez_{(i+1,j,k+1/2)}^{n+1} - Ez_{(i,j,k+1/2)}^{n+1} \right\} / \Delta x - \left\{ Ex_{(i+1/2,j,k+1)}^{n+1/2} - Ex_{(i+1/2,j,k)}^{n+1/2} \right\} / \Delta z \right] \quad (9b)$$

$$Hz_{(i+1/2,j+1/2,k)}^{n+1/2} = Hz_{(i+1/2,j+1/2,k)}^n + Db_{(i+1/2,j+1/2,k)} \cdot \left[\left\{ Ex_{(i+1/2,j+1,k)}^n - Ex_{(i+1/2,j,k)}^n \right\} / \Delta y - \left\{ Ey_{(i+1,j+1/2,k)}^{n+1/2} - Ey_{(i,j+1/2,k)}^{n+1/2} \right\} / \Delta x \right] \quad (10)$$

$$Hz_{(i+1/2,j+1/2,k)}^{n+1} = Hz_{(i+1/2,j+1/2,k)}^{n+1/2} + Db_{(i+1/2,j+1/2,k)} \cdot \left[\left\{ Ex_{(i+1/2,j+1,k)}^{n+1} - Ex_{(i+1/2,j,k)}^{n+1} \right\} / \Delta y - \left\{ Ey_{(i+1,j+1/2,k)}^{n+1/2} - Ey_{(i,j+1/2,k)}^{n+1/2} \right\} / \Delta x \right] \quad (10b)$$

3. 漸化式の導出

ところで、式(4)~(6)および式(8)~(10)は、左辺と右辺に同時刻で定義された変数があるため、このままでは更新ができない。これが陰解法の定式化の特徴であるが、ADI-FDTD 法では次のように式を連立させることで漸化式を導出する。

$$\begin{aligned} & -aEx_{(i+1/2,j,k-1)}^{n+1/2} + bEx_{(i+1/2,j,k)}^{n+1/2} - cEx_{(i+1/2,j,k+1)}^{n+1/2} \\ & = pEx_{(i+1/2,j,k)}^n \\ & + \frac{Hz_{(i+1/2,j+1/2,k)}^n - Hz_{(i+1/2,j-1/2,k)}^n}{\Delta y_{(j)}} \\ & - \frac{Hy_{(i+1/2,j,k+1/2)}^n - Hy_{(i+1/2,j,k-1/2)}^n}{\Delta z_{(k)}} \\ & + q \frac{Ez_{(i+1,j,k-1/2)}^n - Ez_{(i,j,k-1/2)}^n}{\Delta x_{(i)}} \\ & - r \frac{Ez_{(i+1,j,k+1/2)}^n - Ez_{(i,j,k+1/2)}^n}{\Delta x_{(i)}} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで

$$\begin{aligned}
a &= \frac{Da_{(i+1/2,j,k-1/2)}}{\Delta z^2} & p &= \frac{Ca_{(i+1/2,j,k)}}{Cb_{(i+1/2,j,k)}} \\
b &= \frac{1}{Cb_{(i+1/2,j,k)}} + a + c & q &= \frac{Db_{(i+1/2,j,k-1/2)}}{\Delta z} \\
c &= \frac{Db_{(i+1/2,j,k+1/2)}}{\Delta z^2} & r &= \frac{Db_{(i+1/2,j,k+1/2)}}{\Delta z}
\end{aligned}$$

式(4a)の右辺について、時刻 $n+1/2$ の磁界の y 成分に式(9a)を代入すると時刻 $n+1/2$ の変数は電界の x 成分のみとなる。これを整理すると、式(11)の漸化式が導出できる。

また、式(4b)の右辺について、時刻 $n+1$ の磁界の z 成分に式(10b)を代入すると時刻 $n+1$ の変数は電界の x 成分のみとなる。これを整理すると、式(12)の漸化式が導出できる。

$$\begin{aligned}
& -eEx_{(i+1/2,j-1,k)}^{n+1} + fEx_{(i+1/2,j,k)}^{n+1} - gEx_{(i+1/2,j+1,k)}^{n+1} \\
& = SEx_{(i+1/2,j,k)}^{n+1/2} \\
& + \frac{Hz_{(i+1/2,j+1/2,k)}^{n+1/2} - Hz_{(i+1/2,j-1/2,k)}^{n+1/2}}{\Delta y_{(j)}} \\
& - \frac{Hy_{(i+1/2,j,k+1/2)}^{n+1/2} - Hy_{(i+1/2,j,k-1/2)}^{n+1/2}}{\Delta z_{(k)}} \\
& + t \frac{Ey_{(i+1,j-1/2,k)}^{n+1/2} - Ey_{(i,j-1/2,k)}^{n+1/2}}{\Delta x_{(i)}} \\
& - u \frac{Ey_{(i+1,j+1/2,k)}^{n+1/2} - Ey_{(i,j+1/2,k)}^{n+1/2}}{\Delta x_{(i)}}
\end{aligned} \tag{12}$$

ここで

$$\begin{aligned}
e &= \frac{Db_{(i+1/2,j-1/2,k)}}{\Delta y^2} & s &= \frac{Ca_{(i+1/2,j,k)}}{Cb_{(i+1/2,j,k)}} \\
f &= \frac{1}{Cb_{(i+1/2,j,k)}} + e + g & t &= \frac{Db_{(i+1/2,j-1/2,k)}}{\Delta y} \\
g &= \frac{Db_{(i+1/2,j+1/2,k)}}{\Delta y^2} & u &= \frac{Db_{(i+1/2,j-1/2,k)}}{\Delta y}
\end{aligned}$$

漸化式(11)は、次のような 3 重対角行列で表現でき、これを解くことによって電界の x 成分の値を時刻 n から時刻 $n+1/2$ へ更新できる。これは電界の x 成分を z 方向について解くことを意味している。

$$\begin{pmatrix}
b_1 & -c_1 & & & \\
-a_2 & b_2 & -c_2 & & 0 \\
& & \ddots & & \\
& & & \ddots & \\
0 & & -a_{nk-1} & b_{nk-1} & -c_{nk-1} \\
& & & -a_{nk} & b_{nk}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
Ex_1^{n+1/2} \\
Ex_2^{n+1/2} \\
\vdots \\
\vdots \\
Ex_{nk-1}^{n+1/2} \\
Ex_{nk}^{n+1/2}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
v_1^n \\
v_2^n \\
\vdots \\
\vdots \\
v_{nk-1}^n \\
v_{nk}^n
\end{pmatrix}$$

漸化式(12)は、次のような 3 重対角行列で表現でき、これを解くことによって電界の x 成分の値を時刻 $n+1/2$ から時刻 $n+1$ へ更新できる。これは電界の x 成分を y 方向について解くことを意味している。

$$\begin{pmatrix}
f_1 & -g_1 & & & \\
-e_2 & f_2 & -g_2 & & 0 \\
& & \ddots & & \\
& & & \ddots & \\
0 & & -e_{nj-1} & f_{nj-1} & -g_{nj-1} \\
& & & -e_{nj} & f_{nj}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
Ex_1^{n+1} \\
Ex_2^{n+1} \\
\vdots \\
\vdots \\
Ex_{nj-1}^{n+1} \\
Ex_{nj}^{n+1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
w_1^{n+1/2} \\
w_2^{n+1/2} \\
\vdots \\
\vdots \\
w_{nj-1}^{n+1/2} \\
w_{nj}^{n+1/2}
\end{pmatrix}$$

電界の他の成分についても同様に漸化式が導出できて、 y 成分については z 方向と x 方向について交互に解き、 z 成分については x 方向と y 方向について交互に解くことにより、電界 3 成分の更新が実行できる。このように、交互に異なる方向について陰解法を適用して計算するところに ADI 法(交互方向陰解法) [5]の特徴が表れている。

なお、磁界の各成分の更新は、電界の各成分の更新が完了した後に、式(8)～(10)を直接計算することで実行できる。

以上の手順をフローチャートにすると図 2 のようになる。

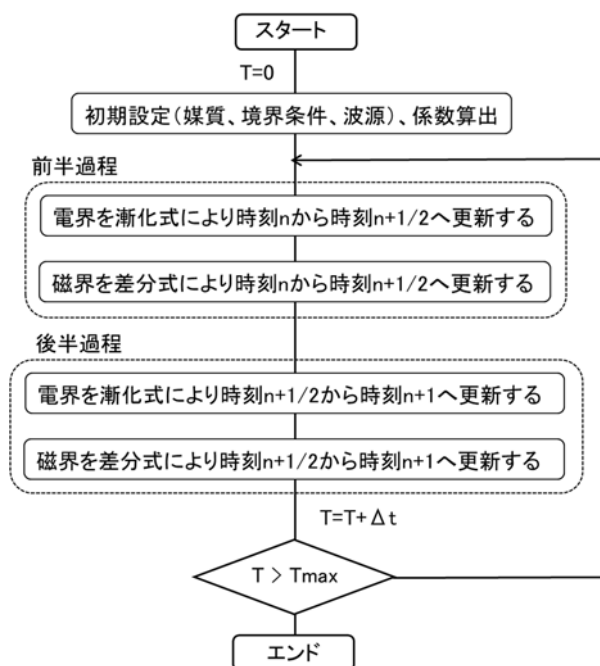


図2 ADI-FDTD法のフローチャート

時間を1ステップ進める工程において、ADI-FDTD法では、FDTD法と比べて約4倍の計算時間と約2倍のメモリを必要とする。これは、電磁界の更新が2段階になること、電界の更新で3重対角行列を解くこと、中間の時刻での電界をメモリに記憶しておく必要があること、等の理由による。

4. 安定性と時間刻み幅

初めに述べたように、通常のFDTD法は陽解法であるため、式(13)で表現されるCFL条件の制約を受ける。

$$\Delta t < \Delta t_{\text{CFL}} \quad (13)$$

$$\Delta t_{\text{CFL}} = \frac{1}{v \sqrt{(1/\Delta x_{\min})^2 + (1/\Delta y_{\min})^2 + (1/\Delta z_{\min})^2}}$$

ここで、 Δt は時間刻み幅、 $\Delta x_{\min}$ 、 $\Delta y_{\min}$ 、 $\Delta z_{\min}$ はそれぞれ x、y、z 方向の最小格子間隔、 v は電磁波の速度（真空中では光速）である。

FDTD法ではCFL条件を満たさない場合、計算が直ちに発散する。一方、ADI-FDTD法は無条件安定であるため、CFL条件を満たさないような大きい Δt を設定しても発散することなく計算が安定に実行できる。なお、ADI-FDTD法が無条件安

定であることの解析的な証明は、参考文献 [3]を参照されたい。従って、 Δt の上限は、問題ごとに要求される精度によって制約される。

5. 計算事例

第3節で述べたように、ADI-FDTD法はFDTD法約4倍の計算時間がかかるので、 Δt を Δt_{CFL} の4倍以上に設定することができれば、計算時間の短縮が図れる。本節では、この効果が顕著に確認できた計算事例 [6] を紹介する。

5.1. 計算モデル

図3のような導電性薄膜からなる半立方体殻が平面地板上にあるモデル [7]を計算した。

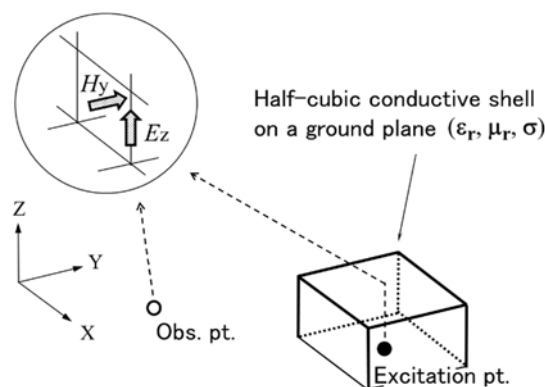


図3 平面地板上の半立方体殻

図4にその断面図を示す。計算領域下端面には完全導体の境界条件を設定し、それ以外の終端面にはMurの吸収境界条件 [8]を設定した。

図5に断面の格子分割の様子を示す。また、半立方体殻の寸法および電気的特性を表1に示す。

殻内部の励振地点の電磁界にパルスを印加し、観測地点における電磁界を時間領域で算出する。また、半立方体殻がない場合についても同様の計算をし、観測地点での電磁界をそれぞれフーリエ変換して比をとることによりシールド効果を算出した。電界に対するシールド効果は地板に垂直な電界を、磁界に対するシールド効果は地板に平行な磁界を励振して計算した。

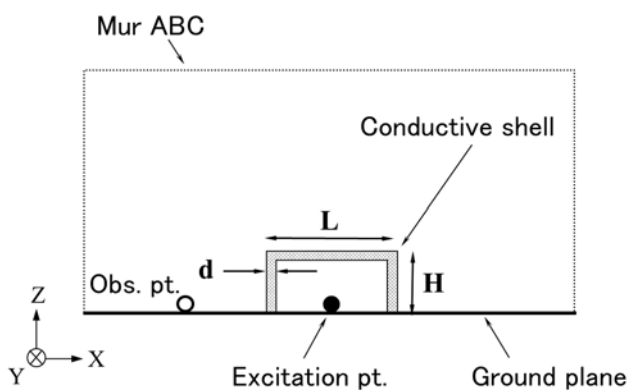


図 4 半立方体殻の断面

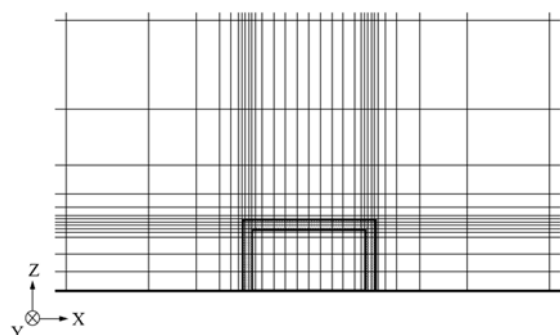


図 5 断面における格子分割の様子

表 1 半立方体殻の寸法および電気的特性

L(mm)	H(mm)	d(mm)	μ_r	ϵ_r	σ (S/m)
56.0	25.0	0.024	1.0	1.0	2400

本計算モデルでは、半立方体殻の厚さが評価する電磁波の波長よりもかなり薄い。そこで、領域の格子分割に不均一格子を使用して、殻近傍の格子間隔が殻の厚さの $1/3$ となるように設定し、殻内部および外部に行くにつれて格子間隔が徐々に大きくなるようにした。これにより、本計算モデルでは、最小格子間隔が $8 \times 8 \times 8 \mu\text{m}^3$ 、 Δt_{CFL} が 15.396 fs となった。

5.2. 計算結果

電界と磁界に対するシールド効果の計算結果を、実験値および厳密解 [7]とともに、それぞれ図 6 および図 7 に示す。これらから、計算結果、実験値および厳密解は良好に一致していることが確認できる。

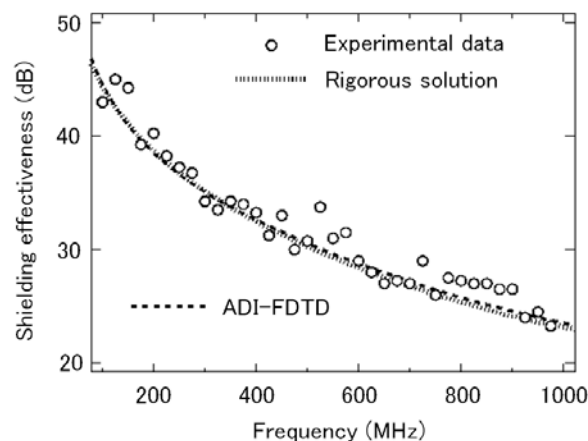


図 6 電界に対するシールド効果

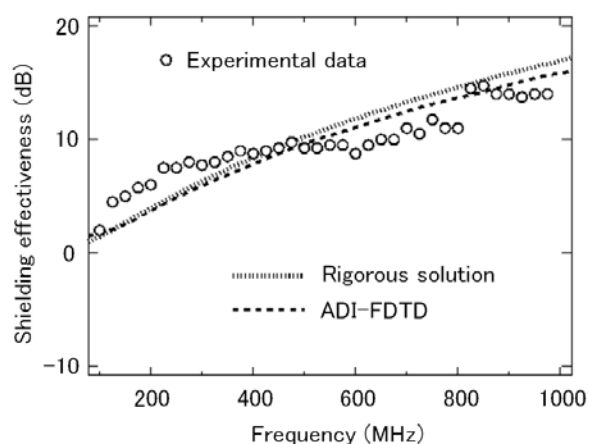


図 7 磁界に対するシールド効果

なお、FDTD 法による計算結果を記載していないのは、 Δt_{CFL} が小さ過ぎてパルスが励振できず、計算が実行できなかったためである。

表 2 計算コストの比較

	Δt	Time-loop iterations	CPU time	Memory
ADI-FDTD	0.96 ps	7200	3749 s	35.6 Mb
FDTD	15.38 fs	449415	60060 s	18.4 Mb

表 2 に計算コストを示す。ここで、FDTD 法による計算コストは見積値である。FDTD 法の Δt は CFL 条件を満たすように設定し、ADI-FDTD 法の Δt はその 125 倍に設定している。そのため ADI-FDTD 法では、FDTD 法と比較して、時間ル

ープの繰り返し数は 1/125 で済み、計算時間は約 3%に低減できている。一方、メモリサイズは約 1.9 倍必要となった。

5.3. 結論

ADI-FDTD 法を用いた導電性薄膜からなる半立方体殻のシールド効果の計算では、 Δt を Δt_{CFL} の 125 倍に設定することで、精度を保ったまま計算時間を約 3%に短縮できた。

シールド効果を物理的に決定するのは導電性薄膜を電磁波が透過する際の減衰量であるが、導電率が高い場合には薄膜内部で電磁波の速度が非常に小さくなり、局所的に CFL 条件が大幅に緩和される。これが、 Δt を十分に大きくしても精度が保たれら要因と考えられる。

6. まとめ

無条件安定な ADI-FDTD 法について、定式化と漸化式の導出を解説し、本手法による計算時間の短縮効果が顕著な計算事例を示した。ADI-FDTD 法は無条件安定であり、CFL 条件を満たさないような大きい Δt を設定しても、発散することなく安定に計算が実行できる。

ただし、 Δt の増大は計算精度の低下を引き起こすため、 Δt を Δt_{CFL} と同程度に設定せざるを得ない問題も多く、そのような場合は ADI-FDTD 法の利点が発揮できない。

それでも、精度を保ったまま計算時間を大幅に短縮できる場合があることは、本稿の計算事例で示した通りである。例えば、波長に比べて微細な導電性媒質や高誘電率媒質を含む問題では、その内部で電磁波の速度が低下し、局所的に CFL 条件が緩和される。その部位での物理現象が問題の本質となるような場合には、ADI-FDTD 法の利点が発揮できると考えられる。今後、このような問題に取り組んで行きたいと思っている。

参考文献

- [1] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," IEEE Trans.

Antennas Propagat., vol. AP-14, pp. 302–307, May 1966.

- [2] A. Taflove, Computational Electrodynamics., Norwood, MA: Artech House, 1995.
- [3] T. Namiki, "A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 47, pp. 2003–2007, Oct. 1999.
- [4] T. Namiki, "3-D ADI-FDTD method—Unconditionally stable time-domain algorithm for solving full vector Maxwell's equations," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 48, pp. 1743–1748, Oct. 2000.
- [5] G. D. Smith, Numerical Solution of Partial Differential Equations, Oxford, U.K.: Oxford Univ. Press, 1965.
- [6] T. Namiki, K. Ito, "Numerical Simulation Using ADI-FDTD Method to Estimate Shielding Effectiveness of Thin Conductive Enclosures," IEEE Trans. Microwave Theory Tech. vol.49, pp.1060-1066, 2001.
- [7] 磯野他, 信学論(B), Vol. 82-B, No.2, pp.302-307, 1999.
- [8] G. Mur, "Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations," IEEE Trans. Electromag. Compat., vol. EMC-23, pp. 377–382, Nov. 1981.

※ 技術情報誌アドバンスシミュレーションは、アドバンスソフト株式会社 ホームページのシミュレーション図書館から、PDF ファイルがダウンロードできます。(ダウンロードしていただくには、アドバンス/シミュレーションフォーラム会員登録が必要です。)