流れのある音場での音響解析の解析解

松原　聖[*]　　田之上　文彦[**]　　尾川　慎介[**]

Theoretical Solutions on Acoustic Field with Velocity

Kiyoshi Matsubara[*], Fumihiko Tanoue[**] and Shinsuke Ogawa[**]

流れのある音場での音響解析に関し、その解析解がいくつかの文献には示されている。しかし、その導出方法や解析解の詳細については記載されていないことが多かった。本稿では、それらの求め方および解析解を示す。また、そこで示された解析解と音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise による解析結果を比較した。

Key word: 音響解析、流れ場、解析解、音響管、放射音

1. はじめに

速度場のあるケースでの解析については、これまで音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise を利用したいくつかの事例を紹介してきた。速度場のある音響解析においては、公開された文献では、その具体的な解析解やその導出方法を記述した文献は見当たらない。特に、3 次元の解析解については公開された文献には記載がないため、ここで詳細について示す。また、本稿では、1 次元音響管と 3 次元放射音に対して、ここで示した解析解と音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise の解析結果とを比較した。

また、参考文献[3][4]は半世紀程度以前の論文であるが、級数展開と複素関数論を利用した方法で解析解を求める方法について記載されている。ここではその方法の詳細について触れないが、計算機のない時代における音響問題に対しては、複素関数論が非常に有用なツールであったことがうかがえる。

2. 流れ場のある場合の基礎式

音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise での流れ場のある場合の音響方程式は次の通りである。

$$\left(1-M_x{}^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\left(1-M_y{}^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\left(1-M_z{}^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$
$$-\left(2M_xM_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+2M_yM_z\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}+2M_zM_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}\right)$$
$$-2ik\left(M_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+M_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+M_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+k^2\varphi=0 \qquad (1)$$

ここで、M_x, M_y, M_z は、静止した場に対して、それぞれの軸の正方向に向かう流れの速度を示す。本稿では、解析解とシミュレーション結果を比較することが目的である。従って、すべてのケースにおいて、解析解を得ることができる一様流れ場を取り扱う。すなわち、以下では、

$$M_x>0 \quad M_y=0 \quad M_z=0 \qquad (2)$$

を仮定する。

3. 流れ場の中での 1 次元伝播

3.1. 解析解

本節では、流れ場の中での 1 次元伝播を対象とするため、まず、前節で述べた 3 次元の方程式を、解析解のある 1 次元の方程式で考える。1 次元の方程式は、平面波、または、波長に対して十分に細い管の中の伝播を表している。流れ場の中での 1 次元の方程式は、

[*]アドバンスソフト株式会社　代表取締役社長
President , AdvanceSoft Corporation
[**]アドバンスソフト株式会社　第 1 事業部
1st Computational Science and Engineering Group, AdvanceSoft Corporation

$$\left(1-M_x{}^2\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+2ikM_x\frac{\partial\phi}{\partial x}+k^2\phi=0 \tag{3}$$

となる。この方程式に対する解析解は、

$$\phi=\exp\left(\frac{ikx}{1+M}\right) \tag{4}$$

$$\phi=\exp\left(-\frac{ikx}{1-M}\right) \tag{5}$$

の 2 つである。これは、それぞれ簡単な計算

$$\begin{aligned}&\left(1-M^2\right)\left(\frac{ik}{1+M}\right)^2\phi+2ikM\left(\frac{ik}{1+M}\right)\phi+k^2\phi\\&=k^2\phi\left\{-\frac{1-M^2}{(1+M)^2}-\frac{2M}{1+M}+1\right\}\\&=\frac{k^2\phi}{(1+M)^2}\left\{-\left(1-M^2\right)-2M(1+M)+(1+M)^2\right\}=0\end{aligned} \tag{6}$$

および

$$\begin{aligned}&\left(1-M^2\right)\left(\frac{ik}{1-M}\right)^2\phi-2ikM\left(\frac{ik}{1-M}\right)\phi+k^2\phi\\&=k^2\phi\left\{-\frac{1-M^2}{(1-M)^2}+\frac{2M}{1-M}+1\right\}\\&=\frac{k^2\phi}{(1-M)^2}\left\{-\left(1-M^2\right)+2M(1-M)+(1-M)^2\right\}=0\end{aligned} \tag{7}$$

で確認できる。それぞれ、進行波と後退波に相当する。また、開放の境界条件は、

$$i\omega\rho\phi-(1+M)\rho c\cdot grad\,\phi=0 \tag{8}$$

である。

3.2. シミュレーションによる解析結果

前節で示した解析解を有限要素法による音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise で確認する。ここでの計算条件は。

- ケース A； $M_x=0.0$
- ケース B； $M_x=-0.2$
- ケース C； $M_x=0.2$

とした。以下に、音響速度ポテンシャルと音圧レベルの計算結果を示す。ここで得られた結果はすべて解析解と一致していることが分かる。音響速度ポテンシャルの結果では、流れの方向に波が広がっている様子が分かる。

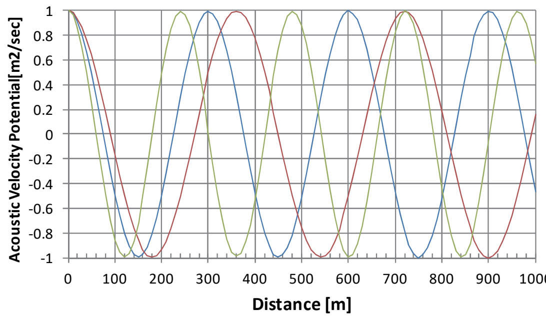

図 1　音響速度ポテンシャル（ケース A,B,C）

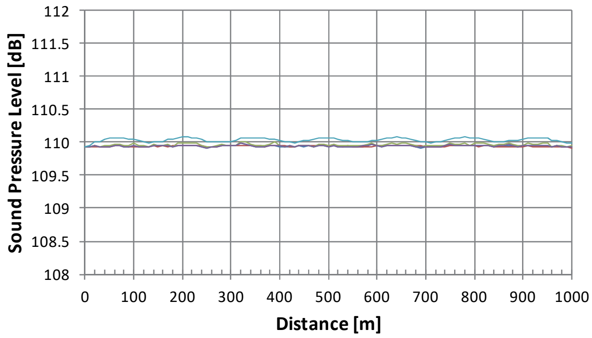

図 2　音圧レベル（ケース A,B,C）

4. 流れ場の中での 3 次元伝播

4.1. Prandtl-Glauert 変換を用いた解析解

本節では、流れ場の中での 3 次元伝播の解析解を得ることができるケースとして、一様な流れがある場での点音源からの 3 次元空間への放射に関する解析解を求める方法を示す。ここでは、空力分野において Prandtl-Glauert 変換と呼ばれている定式化を利用する。ここで利用する一方向の一様流れ

$$M_x>0\quad M_y=0\quad M_z=0 \tag{9}$$

の条件は、x 軸の負の方向から x 軸の正の方向に向かって音の伝搬媒体（空気）が流れていることを意味する。この値を仮定することで、基礎方程式は

$$\begin{aligned}&\left(1-M_x{}^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\\&-2ikM_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+k^2\varphi=0\end{aligned} \tag{10}$$

となる。以下では、簡単のため、 M_x を M と書

くことにする。ここで利用する Prandtl-Glauert 変換はローレンツ変換のアナロジーであり

$$\beta = \sqrt{1-M^2} \tag{11}$$

として、

$$k = \beta K \tag{12}$$

$$x = \beta X \tag{13}$$

$$\varphi(x, y, z) = \exp(iKMX)\Psi(X, y, z) \tag{14}$$

を新たな座標系 (X, y, z) と K 、および、その座標系での関数 $\Psi(X, y, z)$ を定義する。最初に、基礎方程式をこの座標系に書き換える。まず、新しい変数の定義から、一階微分について

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X}\{\exp(iKMX)\Psi\}$$
$$= \frac{1}{\beta}\left\{iKM\exp(iKMX)\Psi + \exp(iKMX)\frac{\partial\Psi}{\partial X}\right\} \tag{15}$$

を得る。また、二階微分については、

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{1}{\beta}\left\{iKM\exp(iKMX)\Psi + \exp(iKMX)\frac{\partial\Psi}{\partial X}\right\}\right]$$
$$= \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial X}\left\{iKM\exp(iKMX)\Psi + \exp(iKMX)\frac{\partial\Psi}{\partial X}\right\}$$
$$= \frac{1}{\beta^2}\left\{\begin{array}{l} -K^2M^2\exp(iKMX)\Psi + 2iKM\exp(iKMX)\dfrac{\partial\Psi}{\partial X} \\ +\exp(iKMX)\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial X^2} \end{array}\right\} \tag{16}$$

となる。これを、基礎方程式の

$$\beta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - 2ikM\frac{\partial\varphi}{\partial x} + k^2\varphi = 0 \tag{17}$$

に代入する。

$$-K^2M^2\exp(iKMX)\Psi + 2iKM\exp(iKMX)\frac{\partial\Psi}{\partial X}$$
$$+\exp(iKMX)\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}$$
$$+\exp(iKMX)\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \exp(iKMX)\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$$
$$-2iKM\left\{iKM\exp(iKMX)\Psi + \exp(iKMX)\frac{\partial\Psi}{\partial X}\right\}$$
$$+(1-M^2)K^2\exp(iKMX)\Psi = 0 \tag{18}$$

となり、これを整理して

$$-K^2M^2\Psi + 2iKM\frac{\partial\Psi}{\partial X} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$$
$$+2K^2M^2\Psi - 2iKM\frac{\partial\Psi}{\partial X} + (1-M^2)K^2\Psi = 0 \tag{19}$$

であり、

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + K^2\Psi = 0 \tag{20}$$

となる。この方程式は速度場なしの基礎方程式であり、進行波の解析解

$$\Psi = \frac{1}{R}\exp(-ikR) \tag{21}$$

$$R = \sqrt{X^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\left(\frac{x}{\beta}\right)^2 + y^2 + z^2} \tag{22}$$

がある。従って、一様流れ場の解析解は、

$$\varphi(x, y, z) = \exp(iKMX)\Psi(X, y, z)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{1-M^2} + y^2 + z^2}}\exp\left(ik\frac{M}{1-M^2}x\right)$$
$$\exp\left(-i\frac{k}{\sqrt{1-M^2}}\sqrt{\frac{x^2}{1-M^2} + y^2 + z^2}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{1-M^2} + y^2 + z^2}}$$
$$\exp\left\{ik\left(\frac{Mx}{1-M^2} - \frac{1}{\sqrt{1-M^2}}\sqrt{\frac{x^2}{1-M^2} + y^2 + z^2}\right)\right\} \tag{23}$$

となる。例えば、x 軸上での解は、

$$\sqrt{\frac{x^2}{1-M^2}} = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{1-M^2}} & (x \geq 0) \\ \dfrac{-x}{\sqrt{1-M^2}} & (x < 0) \end{cases} \tag{24}$$

から

$$\varphi(x,0,0) = \begin{cases} \dfrac{1}{R}\exp\left(-\dfrac{ikx}{1+M}\right) & (x \geq 0) \\ \dfrac{1}{R}\exp\left(\dfrac{ikx}{1-M}\right) & (x < 0) \end{cases} \tag{25}$$

となり、$1/R$ の項を除いて 1 次元の解と類似した解となる。この解析解から、ポテンシャルの大きさは

$$\left|\varphi(x,y,z)\right| = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{\left(1-M^2\right)} + y^2 + z^2}} \tag{26}$$

となる。従って、流れが緩やかな場合にはほぼ同心円となることが分かる。すなわち、ポテンシャルの大きさの等値面は原点を中心とした楕円球である。楕円球の縦横比（つぶれ方）は $\sqrt{1-M^2}$ 程度である。ただし、$\sqrt{1-M^2}$ の値は下記の通りのため、ほぼこれは同心円（球）となる。

表 1　流れのマッハ数とポテンシャル大きさの等値面の縦横比

M	0.00	0.10	0.20	0.30
$\sqrt{1-M^2}$	1.00	0.99	0.98	0.95

この事実は、音響速度ポテンシャルの絶対値は、上流と下流には対称に分布していることが分かる。直観的には少し違和感があるが、このことについては、考察で再度述べる。

4.2. シミュレーションによる解析結果

音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise を利用して、M=0.2 における流れ場の中での 3 次元伝播の計算結果を示す。

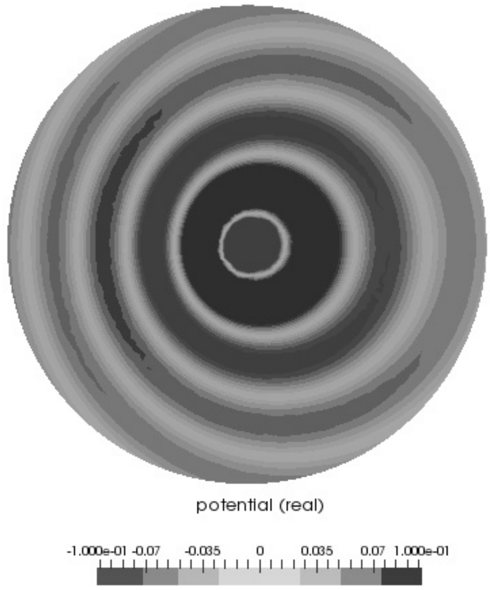

図 3　音響速度ポテンシャルの実数部

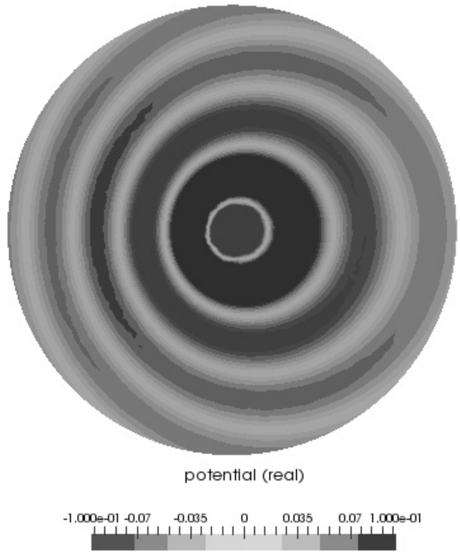

図 4　音響速度ポテンシャルの虚数部

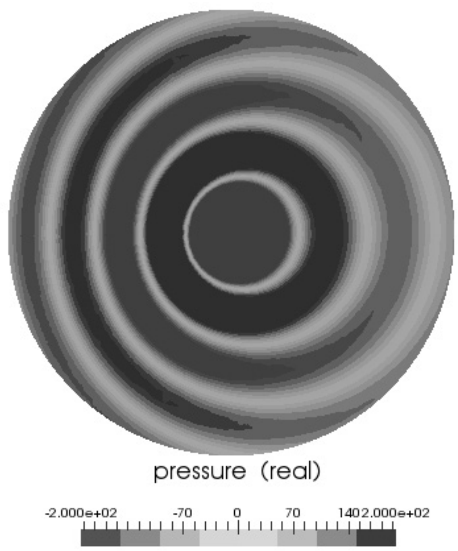

図 5　音圧の実数部

図 6　音圧の虚数部

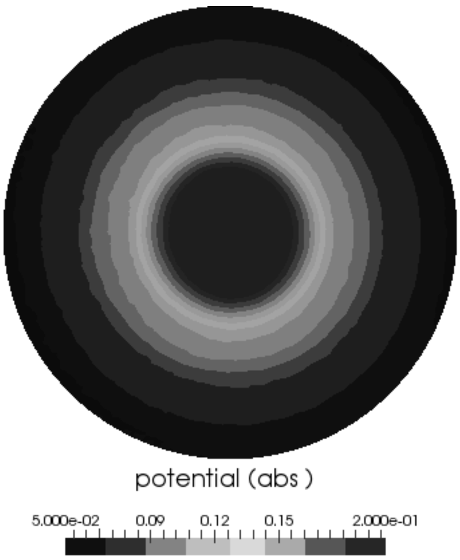

図 7　音響速度ポテンシャルの絶対値

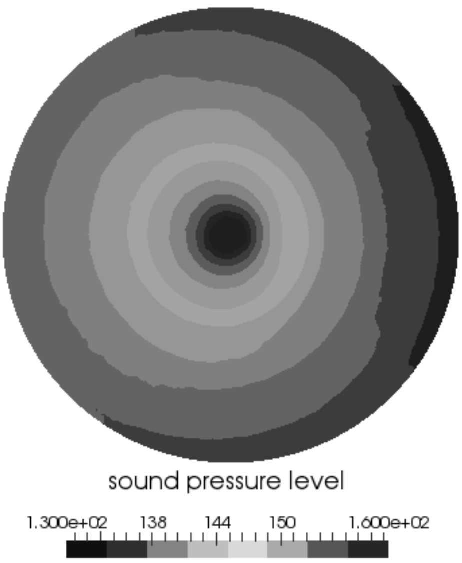

図 8　音圧レベル

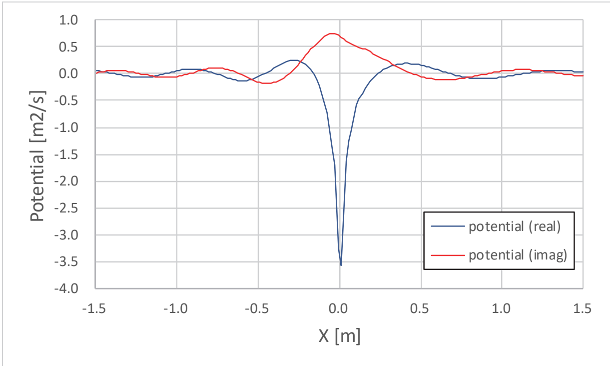

図 9　X 軸上の音響速度ポテンシャル

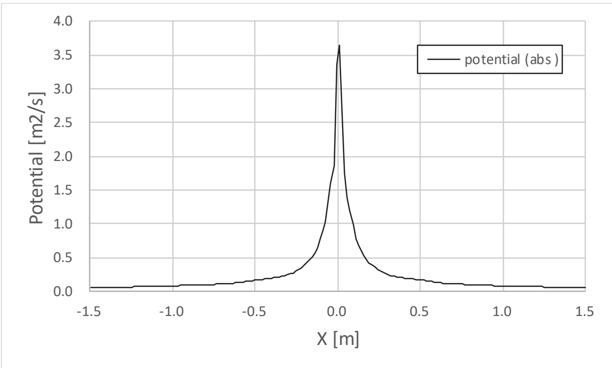

図 10　X 軸上の音響速度ポテンシャルの大きさ

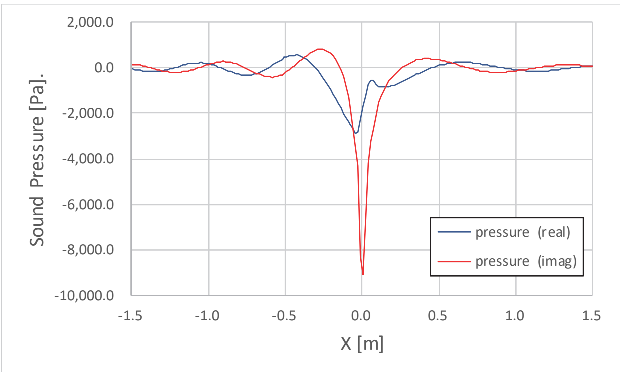

図 11　X 軸上の音圧

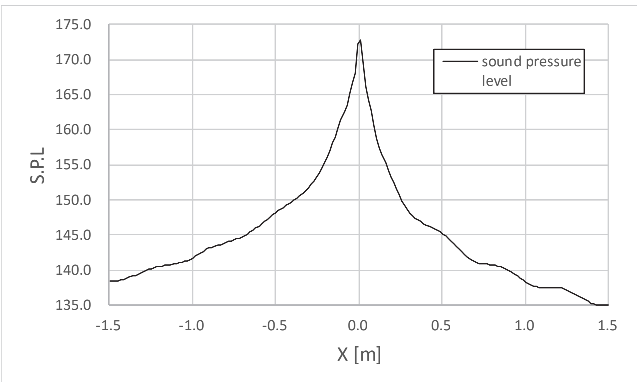

図 12　X 軸上の音圧レベル

図 7 に示すように、これらの解が、前節で求めた解析解の傾向として

・音響速度ポテンシャルのレベルはほぼ同心円である。
・音響速度ポテンシャルの位相は風下に流れる。
を満たしていることが確認できた。

4.3. 考察

4.3.1. 概要

音響速度ポテンシャルは、一定の流れ場における解は、音源を中心とする楕円球となる。ただし、本ケース M=0.2 における偏心率は 2%程度であるためほとんど同心円に見える。

音圧レベル分布の解は、コンタが流れの上流にずれた分布となる。この傾向は、音圧の実数部・虚数部および音響速度ポテンシャルの実数部・虚数部が流れの下流側にずれた分布となることとは異なり、直観的には奇異に感じるかもしれない。しかし、この分布が理論的には正しいことを次の節で示す。

4.3.2. 音圧の解析式

前で示した通り、一定の流れ場における解析解は、Prandtl-Glauert 変換を用いて、次の形になることが分かる。

$$\varphi(x,y,z)=\exp(iKMX)\Psi(X,y,z)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{1-M^2}+y^2+z^2}}\exp\left\{ik\left(\frac{Mx}{1-M^2}-\frac{1}{\sqrt{1-M^2}}\sqrt{\frac{x^2}{1-M^2}+y^2+z^2}\right)\right\} \quad (27)$$

ここで、

$$\sqrt{\frac{x^2}{1-M^2}}=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{1-M^2}} & (x\ge 0)\\[2ex] \dfrac{-x}{\sqrt{1-M^2}} & (x<0)\end{cases} \quad (28)$$

を用いて、x 軸上の解は、

$$\varphi(x,0,0)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-M^2}}{x}\exp\left(-\dfrac{ikx}{1+M}\right) & (x\ge 0)\\[2ex] -\dfrac{\sqrt{1-M^2}}{x}\exp\left(\dfrac{ikx}{1-M}\right) & (x<0)\end{cases} \quad (29)$$

となることが分かる。これは 1 次元の解の形に類似しており、通常に理解できる関数となっている。

また、流れ場のある音圧は、一般に音響速度ポテンシャルと音圧は、次のような関係式となる。

$$p=\rho\left(i\omega\varphi-\left(M_x c\frac{\partial\varphi}{\partial x}+M_y c\frac{\partial\varphi}{\partial x}+M_z c\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right) \quad (30)$$

である。本ケースで対象としている流れ場は、x 軸方向に一定速度の流れ場である。また、x 軸上の音圧レベルを求めることに着目すると

$$p=\rho\left(i\omega\varphi(x,0,0)-Mc\frac{\partial\varphi(x,0,0)}{\partial x}\right) \quad (31)$$

である。以下では、この音圧の式を利用する。

まず、$x\ge 0$ の場合に x 軸上で音圧レベルを求める。

$$\varphi(x,0,0)=\frac{\sqrt{1-M^2}}{x}\exp\left(-\frac{ikx}{1+M}\right) \quad (32)$$

を微分して

$$\frac{\partial\varphi(x,0,0)}{\partial x}$$
$$=-\frac{\sqrt{1-M^2}}{x^2}\exp\left(-\frac{ikx}{1+M}\right)-\frac{\sqrt{1-M^2}}{x}\frac{ik}{1+M}\exp\left(-\frac{ikx}{1+M}\right)$$
$$=-\frac{\sqrt{1-M^2}}{x^2} \quad (33)$$

を得る。この両式を利用して、音圧は

$$\frac{p}{\rho}=i\omega\frac{\sqrt{1-M^2}}{x}\exp\left(-\frac{ikx}{1+M}\right)$$
$$+Mc\frac{\sqrt{1-M^2}}{x^2}\left(1+\frac{ikx}{1+M}\right)\exp\left(-\frac{ikx}{1+M}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{1-M^2}}{x^2}\left(i\omega x-Mc\left(1+\frac{ikx}{1+M}\right)\right)\exp\left(-\frac{ikx}{1+M}\right) \quad (34)$$

である。従って、音圧レベルは、x 軸上では

$$\left|\frac{p}{\rho}\right| = \left|\frac{\sqrt{1-M^2}}{x^2}\left(i\omega x - Mc\left(1+\frac{ikx}{1+M}\right)\right)\right|$$
$$= \frac{\sqrt{1-M^2}}{x^2}\sqrt{M^2c^2 + \left(\omega - \frac{kcM}{1+M}\right)^2 x^2}$$
$$= \frac{\sqrt{1-M^2}}{x^2}\sqrt{M^2c^2 + \left(\omega - \frac{\omega M}{1+M}\right)^2 x^2} \qquad (35)$$
$$= \frac{\sqrt{1-M^2}}{x^2}\sqrt{M^2c^2 + \left(\frac{\omega}{1+M}\right)^2 x^2}$$

となる。

次に、$x<0$ の場合に x 軸上で音圧レベルを求める。同じ手順で、

$$\varphi(x,0,0) = -\frac{\sqrt{1-M^2}}{x}\exp\left(\frac{ikx}{1-M}\right) \qquad (36)$$

を微分して

$$\frac{\partial\varphi(x,0,0)}{\partial x}$$
$$= \frac{\sqrt{1-M^2}}{x^2}\exp\left(\frac{ikx}{1-M}\right)$$
$$- \frac{\sqrt{1-M^2}}{x}\frac{ik}{1-M}\exp\left(\frac{ikx}{1-M}\right) \qquad (37)$$
$$= -\frac{\sqrt{1-M^2}}{x^2}\left(-1+\frac{ikx}{1-M}\right)\exp\left(\frac{ikx}{1-M}\right)$$

を得る。この 2 つの式を利用して、音圧は、

$$\frac{p}{\rho}$$
$$= -i\omega\frac{\sqrt{1-M^2}}{x}\exp\left(\frac{ikx}{1-M}\right)$$
$$+ Mc\frac{\sqrt{1-M^2}}{x^2}\left(-1+\frac{ikx}{1-M}\right)\exp\left(\frac{ikx}{1-M}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{1-M^2}}{x^2}\left(-i\omega x + Mc\left(-1+\frac{ikx}{1-M}\right)\right)\exp\left(\frac{ikx}{1-M}\right)$$

$$(38)$$

となる。音圧レベルは、

$$\left|\frac{p}{\rho}\right| = \left|\frac{\sqrt{1-M^2}}{x^2}\left(-i\omega x + Mc\left(1+\frac{ikx}{1-M}\right)\right)\right|$$
$$= \frac{\sqrt{1-M^2}}{x^2}\sqrt{M^2c^2 + \left(-\omega + \frac{kcM}{1-M}\right)^2 x^2}$$
$$= \frac{\sqrt{1-M^2}}{x^2}\sqrt{M^2c^2 + \left(-\omega + \frac{\omega M}{1-M}\right)^2 x^2} \qquad (39)$$
$$= \frac{\sqrt{1-M^2}}{x^2}\sqrt{M^2c^2 + \left(\frac{\omega}{1-M}\right)^2 x^2}$$

である。以上をまとめると、x 軸上では次の式を得る。

$$\left|\frac{p}{\rho}\right| = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-M^2}}{x^2}\sqrt{M^2c^2 + \left(\dfrac{\omega}{1+M}\right)^2 x^2} & (x \geq 0) \\ \dfrac{\sqrt{1-M^2}}{x^2}\sqrt{M^2c^2 + \left(\dfrac{\omega}{1-M}\right)^2 x^2} & (x < 0) \end{cases}$$

$$(40)$$

この式から x 軸上で原点から同じ距離にある点の音圧レベルは、 $x0>0$ として、

$$\left|\frac{p}{\rho}\right|_{x=-x0} > \left|\frac{p}{\rho}\right|_{x=x0} \qquad (41)$$

の関係があることが分かる。すなわち、x 軸上で原点から同じ距離にある点については、流れの上流の点の方が下流の点よりも、音圧レベルが高いことが分かる。例えば、

$$f = 400\,Hz \qquad (42)$$
$$M = 0.2 \qquad (43)$$
$$c = 344.3m/s \qquad (44)$$
$$-1.5 < x < 1.5 \qquad (45)$$

の条件で試算してみる。根号の中の項のオーダーを比較すると、$|x| = 1.0$ 付近で、

$$Mc = 0.2 \times 344.3 = 68.86\,[m/s] \qquad (46)$$

$$\left(\frac{\omega}{1+M}\right)x = \left(\frac{2\pi f}{1+M}\right)x = 2094[m/s]$$
$$\left(\frac{\omega}{1-M}\right)x = \left(\frac{2\pi f}{1-M}\right)x = 3142[m/s] \qquad (47)$$

である。従って、

$$Mc << \left(\frac{\omega}{1+M}\right)x \text{、} Mc << \left(\frac{\omega}{1-M}\right)x \tag{48}$$

であり。第 2 項の値が卓越している。従って、x 軸上で原点から同じ距離にある点については、流れの上流の点の方が下流の点の音圧レベルが高く、その比は

$$20log_{10}\left(\frac{1+M}{1-M}\right) = 3.52[dB] \tag{49}$$

となる。これは、本稿で得られた結果と定量的に一致している。

5. まとめ

本稿では、新しく得られたことは何も示してはいないが、流れのある音響解析の解析解を導出する方法を具体的に示し、その解析解をシミュレーションソフトウェアの解析結果と比較した。今後、音響解析を利用する方や、教育機関での導入問題、また、一般的にも音響解析に興味を持たれた方に、本稿の内容を参照していただければありがたいと考えている。

参考文献

[1] M.S.Howe,"Theory of Vertex Sound ", Cambridge, 2003

[2] P.M.Morse, K.U.Ingard, "Theoritical Acoustics", prenceton University Press, 1986

[3] R.M.Munt,"Acoustic Transmission Properties of a JetPipe with Subsonic Jet Flow:I. The Cold Jet Refrection Coefficient,"Journal of Sound and Vibration, 142(3), 413-436. 1990

[4] R.M.Munt,"The interaction of sound with a subsonic jet issuing from a semi-infinite cylindrical pipe,"Journal of Fluid Mechanics, Vol.83, part 4, 142(3), 609-640. 1977

6. 付録；流れ場のある場合の音響基礎方程式

6.1. 基礎方程式

本解析では、速度を含む音響の基礎方程式を解く。当然その式は、速度なしの場合の拡張となっている。具体的には、文献[1]の 1.2 節、5.2 節等、および文献[2]の 11.1 節の定式化に基づく。また、速度ありの基礎方程式の離散化については、広く利用されている有限要素法を利用して計算を行う。これらの文献で述べられている速度を含んだ音響解析の基礎方程式 convected wave equation は、

$$V(x,t) = grad\left(\Psi\left(x,t\right)\right) \tag{50}$$

を用いた形に変形すると

$$\frac{D_0}{Dt}\left(\frac{\rho}{c^2}\frac{D_0\Psi}{Dt}\right) - \nabla\cdot\left(\rho\nabla\Psi\right) = 0 \tag{51}$$

である。ここで、Ψ は音響速度ポテンシャル、ρ 、c 、および v_0 は、密度、音速、局所的な媒体の流速である。また、

$$\frac{D_0}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla \tag{52}$$

である。これを、周波数領域で解く。この場合には、

$$\Psi(x,t) = \sum_{\nu=1,\infty} \phi(x) e^{-i\omega t} \tag{53}$$

を仮定している。ここで、$\omega = 2\pi\nu$ である。この表現を利用して、音圧は、

$$P(x,t) = -\rho\frac{D\Psi(x,t)}{Dt} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} P(x,t) &= \sum_{\nu=1,\infty} p(x) e^{-i\omega t} \\ &= -\rho\frac{D}{Dt}\left(\sum_{\nu=1,\infty}\phi(x)e^{-i\omega t}\right) \\ &= -\rho\sum_{\nu=1,\infty}\left(-i\omega\phi + v_0\cdot\nabla\phi\right)e^{-i\omega t} \end{aligned} \tag{55}$$

$$p\left(x\right) = -\rho\left(-i\omega\phi(x) + v_0\cdot\nabla\phi\left(x\right)\right) \tag{56}$$

となる。音響速度ポテンシャルを書き換える。

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}\Phi\left(t,x\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + Mc\cdot\nabla\right)\phi\left(x\right)e^{-i\omega t} \\ &= \left\{-i\omega\phi\left(x\right) + Mc\cdot\nabla\phi\left(x\right)\right\}e^{-i\omega t} \end{aligned} \tag{57}$$

また、

$$\nabla\cdot\rho\nabla\Phi\left(t,x\right) = \rho\nabla\cdot\nabla\phi\left(x\right)e^{-i\omega t} \tag{58}$$

である。以下の記述では、

$$M\cdot\nabla = M_x\frac{\partial}{\partial x} + M_y\frac{\partial}{\partial y} + M_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{59}$$

であり、

$$(M\cdot\nabla)^2=\left(M_x\frac{\partial}{\partial x}+M_y\frac{\partial}{\partial y}+M_z\frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$\left(M_x\frac{\partial}{\partial x}+M_y\frac{\partial}{\partial y}+M_z\frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$=M_x{}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+M_y{}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+M_z{}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
$$+2M_xM_y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+2M_yM_z\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+2M_zM_x\frac{\partial^2}{\partial z\partial x} \tag{60}$$

である。これを用いて、

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\rho}{c^2}\frac{D}{Dt}\Phi(t,x)\right)$$
$$=\frac{D}{Dt}\left(\frac{\rho}{c^2}\{-i\omega\phi(x)+Mc\cdot\nabla\phi(x)\}e^{-i\omega t}\right)$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial t}+Mc\cdot\nabla\right)$$
$$\left(\frac{\rho}{c^2}\{-i\omega\phi(x)+Mc\cdot\nabla\phi(x)\}e^{-i\omega t}\right) \tag{61}$$

さらに

$$=-i\omega\frac{\rho}{c^2}\{-i\omega\phi(x)+Mc\cdot\nabla\phi(x)\}e^{-i\omega t}$$
$$+\frac{\rho}{c^2}Mc\cdot\nabla\{-i\omega\phi(x)+Mc\cdot\nabla\phi(x)\}e^{-i\omega t}$$
$$=\left(-\frac{\rho}{c^2}\omega^2\phi(x)-i\omega\frac{\rho}{c^2}Mc\cdot\nabla\phi(x)\right)e^{-i\omega t}$$
$$+\left(-i\omega\frac{\rho}{c^2}Mc\cdot\nabla\phi(x)+\frac{\rho}{c^2}(Mc\cdot\nabla)^2\phi(x)\right)e^{-i\omega t} \tag{62}$$

となり、

$$=\begin{pmatrix}-\frac{\rho}{c^2}\omega^2\phi(x)-2i\omega\frac{\rho}{c^2}Mc\cdot\nabla\phi(x)\\ +\frac{\rho}{c^2}(Mc\cdot\nabla)^2\phi(x)\end{pmatrix}e^{-i\omega t} \tag{63}$$
$$=\rho e^{-i\omega t}\begin{pmatrix}-\frac{\omega^2}{c^2}\phi(x)-2i\frac{\omega}{c}M\cdot\nabla\phi(x)\\ +(M\cdot\nabla)^2\phi(x)\end{pmatrix}$$

と整理できる。さらに、

$$\rho e^{-i\omega t}\left(-\frac{\omega^2}{c^2}\phi(x)-2i\frac{\omega}{c}M\cdot\nabla\phi(x)+(M\cdot\nabla)^2\phi(x)\right)$$
$$-\rho\nabla\cdot\nabla\phi(x)e^{-i\omega t}=0 \tag{64}$$

である。従って、最終的に、周波数領域での音響方程式は、

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\nabla\phi(x)-(M\cdot\nabla)^2\phi(x)\\&+2ikM\cdot\nabla\phi(x)+k^2\phi(x)=0\end{aligned} \tag{65}$$

$$k=\frac{\omega}{c} \tag{66}$$

と書くことができる。これを書き下すと

$$(M\cdot\nabla)^2=M_x{}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+M_y{}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+M_z{}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
$$+2M_xM_y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+2M_yM_z\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+2M_zM_x\frac{\partial^2}{\partial z\partial x} \tag{67}$$

であり、具体的に、周波数領域の基礎方程式を書き下すと、

$$\left(1-M_x{}^2\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\left(1-M_y{}^2\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\left(1-M_z{}^2\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$
$$-\begin{pmatrix}2M_xM_y\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+2M_yM_z\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}\\ +2M_zM_x\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}\end{pmatrix}$$
$$+2ik\left(M_x\frac{\partial\phi}{\partial x}+M_y\frac{\partial\phi}{\partial y}+M_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+k^2\phi=0 \tag{68}$$

となる。ここで、

$$M_x=\frac{u}{c},\quad M_y=\frac{v}{c},\quad M_z=\frac{w}{c} \tag{69}$$

とした。確認のため、速度なしの式は、

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+k^2\phi=0 \tag{70}$$

である。(68)式からは、M_x、M_y、M_z が 1 と比較して小さければ、速度の効果は小さいことが分かる。

6.2. 流れがある場合の無反射境界条件

1 次元の基礎式で流れがある場合の無反射境界条件に関して確認する。

$$\left(1-M_x{}^2\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+2ikM_x\frac{\partial\phi}{\partial x}+k^2\phi=0 \tag{71}$$

$$\phi=\exp\left(\frac{ikx}{1+M}\right)\text{：進行波} \tag{72}$$

$$\phi = \exp\left(-\frac{ikx}{1-M}\right) \text{：後退波} \tag{73}$$

この 2 つは、下記の 2 つから解になることが確認できる。

$$\begin{aligned}
&\left(1-M^2\right)\left(\frac{ik}{1+M}\right)^2\phi + 2ikM\left(\frac{ik}{1+M}\right)\phi + k^2\phi \\
&= k^2\phi\left\{-\frac{1-M^2}{(1+M)^2} - \frac{2M}{1+M} + 1\right\} \\
&= \frac{k^2\phi}{(1+M)^2}\left\{-\left(1-M^2\right) - 2M(1+M) + (1+M)^2\right\} = 0
\end{aligned} \tag{74}$$

$$\begin{aligned}
&\left(1-M^2\right)\left(\frac{ik}{1-M}\right)^2\phi - 2ikM\left(\frac{ik}{1-M}\right)\phi + k^2\phi \\
&= k^2\phi\left\{-\frac{1-M^2}{(1-M)^2} + \frac{2M}{1-M} + 1\right\} \\
&= \frac{k^2\phi}{(1-M)^2}\left\{-\left(1-M^2\right) + 2M(1-M) + (1-M)^2\right\} = 0
\end{aligned} \tag{75}$$

ここで進行波に対して、

$$\frac{i\omega\rho\phi}{grad\phi} = \frac{i\omega\rho\exp\left(\frac{ikx}{1+M}\right)}{\frac{ik}{1+M}\exp\left(\frac{ikx}{1+M}\right)} = \frac{i\omega\rho}{\frac{ik}{1+M}} = (1+M)\rho c \tag{76}$$

である。従って、1 次元の無反射境界条件は、

$$i\omega\rho\phi - (1+M)\rho c \cdot grad\ \phi = 0 \tag{77}$$

として与えればいいことが分かる。

6.3. 流れがある場合の音圧の式

流れがある場合の音圧の式を確認する。ここでは、速度場と音圧について、音響速度ポテンシャルを利用した表現について確認する。速度場においては、$\partial/\partial t$ の替わりに

$$\frac{D_0}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla \tag{78}$$

となる。ここで、粒子速度 $V(x,t) = grad(\Psi(x,t))$ については、

$$\Psi(x,t) = \sum_{\nu=1,\infty}\varphi_\nu(x)\,e^{-i\omega t} \tag{79}$$

と

$$V(x,t) = \sum_{\nu=1,\infty}v_\nu(x)\,e^{-i\omega t} \tag{80}$$

を代入して

$$\sum_{\nu=1,\infty}v_\nu(x)e^{-i\omega t} = \sum_{\nu=1,\infty}grad\varphi_\nu(x)\,e^{-i\omega t} \tag{81}$$

$$v(x) = grad\ \varphi(x) \tag{82}$$

となる。また、音圧は、ここで

$$P(x,t) = -\rho\frac{D\Psi(x,t)}{Dt} \tag{83}$$

に

$$\Psi(x,t) = \sum_{\nu=1,\infty}\varphi_\nu(x)\,e^{-i\omega t} \tag{84}$$

と

$$P(x,t) = \sum_{\nu=1,\infty}p_\nu(x)\,e^{-i\omega t} \tag{85}$$

を代入して

$$\sum_{\nu=1,\infty}p_\nu(x)e^{-i\omega t} = -\rho\sum_{\nu=1,\infty}\frac{D}{Dt}\varphi_\nu(x)\,e^{-i\omega t} \tag{86}$$

$$\sum_{\nu=1,\infty}p_\nu(x)e^{-i\omega t} = -\rho\sum_{\nu=1,\infty}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0\cdot\nabla\right)\varphi_\nu(x)\,e^{-i\omega t} \tag{87}$$

$$\sum_{\nu=1,\infty}p_\nu(x)e^{-i\omega t} = -\rho\sum_{\nu=1,\infty}\left(-i\omega + v_0\cdot\nabla\right)\varphi_\nu(x)\,e^{-i\omega t} \tag{88}$$

従って、

$$p(x) = \rho\left(i\omega\phi(x) - v_0\cdot\nabla\phi(x)\right) \tag{89}$$

が成り立つ。

※ 技術情報誌アドバンスシミュレーションは、アドバンスソフト株式会社 ホームページのシミュレーション図書館から、PDF ファイルがダウンロードできます。（ダウンロードしていただくには、アドバンス/シミュレーションフォーラム会員登録が必要です。）