

Marching Cube法の拡張について

徳永 健一*

An Extension of Marching Cubes

Ken-ichi Tokunaga*

本稿では、CG の分野で用いられている Marching Cube 法について、拡張の 1 つを紹介する。

Key word: コンピュータグラフィクス、メッシュ生成、離散幾何、Surface Reconstruction

1. はじめに

Marching Cube 法とは、ボクセルの頂点にスカラー値が与えられているとき、その符号で配置のパターンを分類することで、0 の等値面のポリゴンを生成するアルゴリズムである。本稿ではこのアルゴリズムを数学的に定式化し、その拡張を与える。

2. 準備と記号

ここではボクセルはX座標、Y座標、Z座標がそれぞれ 1 または -1 を取るような 8 つの頂点からなる立方体とし、その頂点に以下のように番号を付ける。この点集合をMとする。

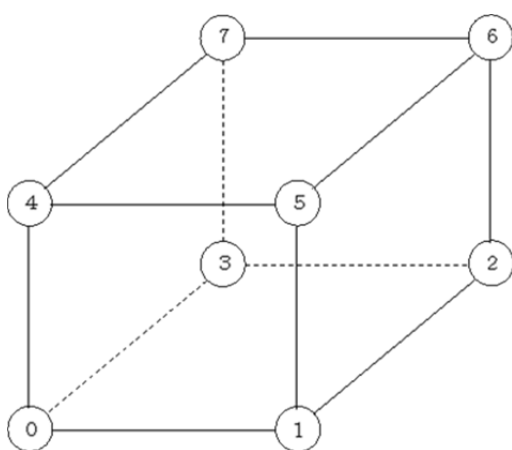


図 1 ボクセル

表 1 ボクセルの座標

頂点番号	座標
0	$(-1, -1, -1)$
1	$(1, -1, -1)$
2	$(1, 1, -1)$
3	$(-1, 1, -1)$
4	$(-1, -1, 1)$
5	$(1, -1, 1)$
6	$(1, 1, 1)$
7	$(-1, 1, 1)$

頂点に与えられたスカラー値について、今は符号による分類に関心があるので値は1と-1だけを考えることにする。

点集合M上の、1または-1を値に取る関数の全体を R_2 とする。Mの回転対称を表す変換群をGとする。1と-1の反転をする群をPとする。

この時、以下のことが成り立つ。

- Mの個数は8である。
- R_2 の個数は256である。
- Gは整数係数の正規直交変換群 $SO(3, \mathbf{Z})$ であり、その位数は24である。

2.1. 変換群の作用

MへのGの作用は 3 次元ベクトルへの行列の積で与えられる。それを用いて、 R_2 へのGの作用を以下の通りとする。

$$R_2 \times G \rightarrow R_2 \quad (1)$$

*アドバンスソフト株式会社 第1事業部

1st Computational Science and Engineering Group, AdvanceSoft Corporation

$$(r \cdot g)(q) = r(gq) \quad \text{for } q \in M \quad (2)$$

R_2 の元を1つ定めるとき、 G の作用によって移りうるもの全体を G の作用による軌道という。

$$G(r) = \{r \cdot g | g \in G\} \quad (3)$$

軌道全体のなす集合を商空間とよび、 R_2/G と書く。

R_2 の元を本稿に限って、1を値に取る頂点番号と、-1を値に取る頂点番号を並べて、2成分の文字列表記をする。

例：[0134,2567] 頂点番号 0,1,3,4 で1を値に取り、2,5,6,7 で-1を値に取るような M 上の関数を表す。

R_2 への P の作用は以下の通りとする。

$$P \times R_2 \rightarrow R_2 \quad (4)$$

$$(p \cdot r)(q) = p(r(q)) \quad \text{for } q \in M \quad (5)$$

2.2. 反転の商空間への作用

R_2 への G の作用と P の作用は可換である。

$$((p \cdot r) \cdot g)(q) = p(r(gq)) = (p \cdot (r \cdot g))(q) \quad (6)$$

従って、 P の作用は R_2 の G の作用による商空間に自然に定義できる。すなわち、 r と r' が G の作用で同じ軌道にあれば、 $p \cdot r$ と $p \cdot r'$ は G の作用で同じ軌道にある。

2.3. 固定部分群

一般に群が作用しているときに、ある元について作用が自明となるもの全体は元の群の部分群となる。これを固定部分群という。

例：[02,134567]の固定部分群は、 Z 軸周りの180度の回転と単位変換からなる位数2の部分群である。

2.4. 軌道の位数について

一般に、 r を通る軌道 $G(r)$ について、 r を固定する固定部分群を G_r とすると、 $G(r) \cong G/G_r$ という関係があるから、特に軌道の位数は G の位数の24の約数になる。

3. 古典的な Marching Cube 法の数学的定式化

本節では、Marching Cube 法として知られている内容を数学的に定式化したものを定理として述べる。

3.1. 定理

R_2 への G の作用の商空間の元の個数は23である。

3.2. 定理

R_2 への G の作用の商空間の元のうち、 P の作用によって不変のもの個数は7である。

3.3. 系

R_2 への G と P の作用の商空間の元の個数は15である。

別の言い方をすると、立方体の8つの頂点に1と-1を配置する方法は回転対称と符号対称性を除けば15通りである。

定理から系は、 $23-7=16$ 個の商空間の元は P の反転によって同一視できるペアがあるので、 $7+16/2=15$ が得られる。

4. Marching Cube 法の拡張

ボクセルの頂点で取り得る値を1、-1に0を追加して3値にする。

点集合 M 上の1、-1、0を値に取る関数の全体を R_3 とする。 R_2 の時と同様に R_3 の元を、0を値に取る頂点番号、1を値に取る頂点番号、-1を値に取る頂点番号を並べて、3成分の文字列表記をする。

この時、以下が成り立つ。証明は省略する。

a) R_3 の個数は6561である。

b) R_3 には G と P の作用が定義できる。

古典的な Marching Cube の数学的定式化の拡張が以下の通りに得られる。

4.1. 定理

R_3 への G の作用の商空間の元の個数は333である。

4.2. 定理

R_3 への G の作用の商空間の元うち、 P の作用によ

って不変のものの個数は 33 である。

4.3. 系

R_3 への G と P の作用の商空間の元の個数は 183 である。

別の言い方をすると、立方体の 8 つの頂点に 1 と -1 と 0 を配置する方法は回転対称と符号対称性を除けば 183 通りである。

定理から系は $(333-33)/2+33=183$ によって得られる。

5. 数表による証明

本稿では証明を与える代わりに、実装の際の手掛かりとなるよう、構成論的に実際に R_3 への G の作用の商空間を列挙する。左の列から、商空間の元（すなわち軌道）の識別子、代表元の R_3 の成分表示（零、正、負の 3 成分）、軌道の R_3 における個数、 P の反転を作用させたときの像（の識別子）、を表す。識別子が 1 から 23 までは R_2 についての商空間の構成も与えている。

表 2 R_3 への G の作用

識別子	零	正	負	個数	P の作用
1			01234567	1	23
2		0	1234567	8	22
3		01	234567	12	19
4		02	134567	12	20
5		06	123457	4	21
6		012	34567	24	16
7		016	23457	24	17
8		025	13467	8	18
9		0123	4567	6	9
10		0124	3567	12	10
11		0125	3467	8	11
12		0126	3457	12	12
13		0127	3456	24	13
14		0167	2345	6	14
15		0257	1346	2	15
16		01234	567	24	6
17		01246	357	24	7
18		01257	346	8	8
19		012345	67	12	3
20		012346	57	12	4

識別子	零	正	負	個数	P の作用
21		012467	35	4	5
22		0123456	7	8	2
23		01234567		1	1
24	0		1234567	8	71
25	0	1	234567	24	70
26	0	2	134567	24	68
27	0	6	123457	8	69
28	0	12	34567	24	65
29	0	13	24567	24	67
30	0	15	23467	24	63
31	0	16	23457	24	64
32	0	17	23456	24	66
33	0	25	13467	24	62
34	0	26	13457	24	61
35	0	123	4567	24	54
36	0	124	3567	24	56
37	0	125	3467	24	50
38	0	126	3457	24	51
39	0	127	3456	24	52
40	0	134	2567	8	60
41	0	135	2467	24	59
42	0	136	2457	24	55
43	0	156	2347	24	49
44	0	157	2346	24	58
45	0	167	2345	24	53
46	0	256	1347	24	48
47	0	257	1346	8	57
48	0	1234	567	24	46
49	0	1235	467	24	43
50	0	1236	457	24	37
51	0	1237	456	24	38
52	0	1246	357	24	39
53	0	1247	356	24	45
54	0	1256	347	24	35
55	0	1257	346	24	42
56	0	1267	345	24	36
57	0	1346	257	8	47
58	0	1356	247	24	44
59	0	1567	234	24	41
60	0	2567	134	8	40
61	0	12345	67	24	34
62	0	12346	57	24	33
63	0	12356	47	24	30
64	0	12357	46	24	31
65	0	12367	45	24	28
66	0	12467	35	24	32
67	0	12567	34	24	29
68	0	123456	7	24	26

識別子	零	正	負	個数	Pの作用
69	0	123457	6	8	27
70	0	123567	4	24	25
71	0	1234567		8	24
72	01		234567	12	107
73	01	2	34567	24	106
74	01	3	24567	24	105
75	01	6	23457	24	104
76	01	23	4567	24	100
77	01	24	3567	12	103
78	01	25	3467	24	102
79	01	26	3457	24	98
80	01	27	3456	24	99
81	01	35	2467	12	101
82	01	36	2457	24	96
83	01	37	2456	24	97
84	01	67	2345	12	95
85	01	234	567	24	94
86	01	235	467	24	92
87	01	236	457	24	87
88	01	237	456	24	88
89	01	246	357	24	93
90	01	256	347	24	90
91	01	257	346	24	91
92	01	267	345	24	86
93	01	356	247	24	89
94	01	367	245	24	85
95	01	2345	67	12	84
96	01	2346	57	24	82
97	01	2347	56	24	83
98	01	2356	47	24	79
99	01	2357	46	24	80
100	01	2367	45	24	76
101	01	2467	35	12	81
102	01	2567	34	24	78
103	01	3567	24	12	77
104	01	23456	7	24	75
105	01	23467	5	24	74
106	01	23567	4	24	73
107	01	234567		12	72
108	02		134567	12	143
109	02	1	34567	24	142
110	02	4	13567	24	141
111	02	5	13467	24	140
112	02	13	4567	12	139
113	02	14	3567	24	136
114	02	15	3467	24	135
115	02	16	3457	24	138
116	02	17	3456	24	137

識別子	零	正	負	個数	Pの作用
117	02	45	1367	24	131
118	02	46	1357	12	134
119	02	47	1356	24	133
120	02	57	1346	12	132
121	02	134	567	24	130
122	02	135	467	24	129
123	02	145	367	24	123
124	02	146	357	24	127
125	02	147	356	24	125
126	02	156	347	24	126
127	02	157	346	24	124
128	02	167	345	24	128
129	02	456	137	24	122
130	02	457	136	24	121
131	02	1345	67	24	117
132	02	1346	57	12	120
133	02	1347	56	24	119
134	02	1357	46	12	118
135	02	1456	37	24	114
136	02	1457	36	24	113
137	02	1467	35	24	116
138	02	1567	34	24	115
139	02	4567	13	12	112
140	02	13456	7	24	111
141	02	13457	6	24	110
142	02	14567	3	24	109
143	02	134567		12	108
144	06		123457	4	159
145	06	1	23457	24	158
146	06	12	3457	12	156
147	06	13	2457	24	154
148	06	15	2347	12	155
149	06	17	2345	12	157
150	06	123	457	24	150
151	06	124	357	24	151
152	06	134	257	8	152
153	06	135	247	24	153
154	06	1234	57	24	147
155	06	1235	47	12	148
156	06	1237	45	12	146
157	06	1247	35	12	149
158	06	12345	7	24	145
159	06	123457		4	144
160	012		34567	24	191
161	012	3	4567	24	190
162	012	4	3567	24	189
163	012	5	3467	24	188
164	012	6	3457	24	187

識別子	零	正	負	個数	Pの作用
165	012	7	3456	24	186
166	012	34	567	24	185
167	012	35	467	24	184
168	012	36	457	24	183
169	012	37	456	24	182
170	012	45	367	24	181
171	012	46	357	24	180
172	012	47	356	24	179
173	012	56	347	24	178
174	012	57	346	24	177
175	012	67	345	24	176
176	012	345	67	24	175
177	012	346	57	24	174
178	012	347	56	24	173
179	012	356	47	24	172
180	012	357	46	24	171
181	012	367	45	24	170
182	012	456	37	24	169
183	012	457	36	24	168
184	012	467	35	24	167
185	012	567	34	24	166
186	012	3456	7	24	165
187	012	3457	6	24	164
188	012	3467	5	24	163
189	012	3567	4	24	162
190	012	4567	3	24	161
191	012	34567		24	160
192	016		23457	24	223
193	016	2	3457	24	222
194	016	3	2457	24	221
195	016	4	2357	24	220
196	016	5	2347	24	219
197	016	7	2345	24	218
198	016	23	457	24	217
199	016	24	357	24	216
200	016	25	347	24	215
201	016	27	345	24	214
202	016	34	257	24	213
203	016	35	247	24	212
204	016	37	245	24	211
205	016	45	237	24	210
206	016	47	235	24	209
207	016	57	234	24	208
208	016	234	57	24	207
209	016	235	47	24	206
210	016	237	45	24	205
211	016	245	37	24	204
212	016	247	35	24	203

識別子	零	正	負	個数	Pの作用
213	016	257	34	24	202
214	016	345	27	24	201
215	016	347	25	24	200
216	016	357	24	24	199
217	016	457	23	24	198
218	016	2345	7	24	197
219	016	2347	5	24	196
220	016	2357	4	24	195
221	016	2457	3	24	194
222	016	3457	2	24	193
223	016	23457		24	192
224	025		13467	8	239
225	025	1	3467	8	238
226	025	3	1467	24	237
227	025	7	1346	8	236
228	025	13	467	24	235
229	025	17	346	8	234
230	025	34	167	24	233
231	025	37	146	24	232
232	025	134	67	24	231
233	025	137	46	24	230
234	025	346	17	8	229
235	025	347	16	24	228
236	025	1346	7	8	227
237	025	1347	6	24	226
238	025	3467	1	8	225
239	025	13467		8	224
240	0123		4567	6	245
241	0123	4	567	24	244
242	0123	45	67	24	242
243	0123	46	57	12	243
244	0123	456	7	24	241
245	0123	4567		6	240
246	0124		3567	12	255
247	0124	3	567	24	254
248	0124	6	357	24	253
249	0124	35	67	12	252
250	0124	36	57	24	250
251	0124	37	56	24	251
252	0124	67	35	12	249
253	0124	356	7	24	248
254	0124	367	5	24	247
255	0124	3567		12	246
256	0125		3467	8	263
257	0125	3	467	24	262
258	0125	7	346	8	261
259	0125	34	67	24	260
260	0125	37	46	24	259

識別子	零	正	負	個数	Pの作用
261	0125	346	7	8	258
262	0125	347	6	24	257
263	0125	3467		8	256
264	0126		3457	12	273
265	0126	3	457	24	272
266	0126	4	357	24	271
267	0126	34	57	24	267
268	0126	35	47	12	270
269	0126	37	45	24	269
270	0126	47	35	12	268
271	0126	345	7	24	266
272	0126	347	5	24	265
273	0126	3457		12	264
274	0127		3456	24	289
275	0127	3	456	24	288
276	0127	4	356	24	287
277	0127	5	346	24	286
278	0127	6	345	24	285
279	0127	34	56	24	284
280	0127	35	46	24	283
281	0127	36	45	24	282
282	0127	45	36	24	281
283	0127	46	35	24	280
284	0127	56	34	24	279
285	0127	345	6	24	278
286	0127	346	5	24	277
287	0127	356	4	24	276
288	0127	456	3	24	275
289	0127	3456		24	274
290	0167		2345	6	296
291	0167	2	345	24	295
292	0167	23	45	12	292
293	0167	24	35	12	293
294	0167	25	34	12	294
295	0167	234	5	24	291
296	0167	2345		6	290
297	0257		1346	2	301
298	0257	1	346	8	300
299	0257	13	46	12	299
300	0257	134	6	8	298
301	0257	1346		2	297
302	01234		567	24	309
303	01234	5	67	24	308
304	01234	6	57	24	307
305	01234	7	56	24	306
306	01234	56	7	24	305
307	01234	57	6	24	304
308	01234	67	5	24	303

識別子	零	正	負	個数	Pの作用
309	01234	567		24	302
310	01246		357	24	317
311	01246	3	57	24	316
312	01246	5	37	24	315
313	01246	7	35	24	314
314	01246	35	7	24	313
315	01246	37	5	24	312
316	01246	57	3	24	311
317	01246	357		24	310
318	01257		346	8	321
319	01257	3	46	24	320
320	01257	34	6	24	319
321	01257	346		8	318
322	012345		67	12	324
323	012345	6	7	24	323
324	012345	67		12	322
325	012346		57	12	327
326	012346	5	7	24	326
327	012346	57		12	325
328	012467		35	4	330
329	012467	3	5	8	329
330	012467	35		4	328
331	0123456		7	8	332
332	0123456	7		8	331
333	01234567			1	333

6. 応用

ボクセルデータの頂点に値を持つ関数を与えられたときに、その値が0の等値面を求める場合、通常は頂点の値を正または負に2値化して(0の場合は正に組み込む)、従来のMarching Cubeアルゴリズムを用いることが多い。ただしこの場合は、頂点の値が0に十分近いときに極端につぶれた三角形が発生してしまう。そこで絶対値がある閾値以下の値の場合、頂点の値を0とみなし、正、負、零の3値化して、上記の拡張されたMarching Cubeアルゴリズムを用いると、極端につぶれた三角形の発生を抑制できる。

6.1. 例

ボクセル上に壁までの符号付の距離が与えられている場合に、壁の形状を復元するには0の等値面を作成すればよい。0以下の領域をFEMなど

で解析するためにメッシュを作成する場合にこの拡張された Marching Cube 法を用いると、極端につぶれた要素の発生を抑制することができた。以下は球体を充填して得られた距離の分布から球体の内部を FEM 用のメッシュとして取り出したものである。

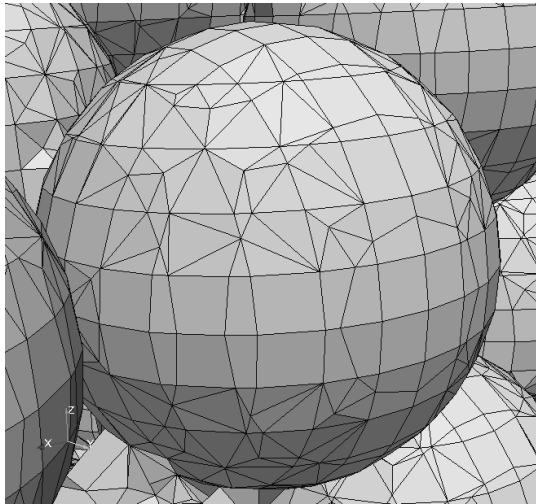


図 2 FEM 用のメッシュ

本手法は当社の商品、微細構造モデリングツール Advance/REVOCAP_PorousModeler に実装されている。なお、回転対称と反転対称を除いた 183 通りの等値面の実装、元の 6561 のパターンを 183 通りに帰着させる方法、帰着させる回転行列の導出、反転の有無の判定など、実装には本稿で示した点以外の工夫も必要である。

6.2. 特徴

従来は CAD で定義された形状からメッシュを作成して FEM などの解析を行うことが良く行われてきた。近年はそれに加えて、CT などの実験結果や他の解析結果などから得られた、ボクセルに定義されたスカラー値で表された形状から、FEM などの解析を行うことも増えてきている。このような場合には、本稿で述べたような手法でメッシュを作成するのが有用である。本手法は局所的に独立した処理（ボクセルごとに決定論的に定めることができる）ので、マルチスレッドなどの並列処理にも向いている。

参考文献

- [1] Lorensen, William E., and Harvey E. Cline.
"Marching cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm." ACM siggraph computer graphics. Vol. 21. No. 4. ACM, 1987.

※ 技術情報誌アドバンスシミュレーションは、アドバンスソフト株式会社 ホームページのシミュレーション図書館から、PDF ファイルがダウンロードできます。（ダウンロードしていただくには、アドバンス/シミュレーションフォーラム会員登録が必要です。）