

伝達マトリクス法による周波数領域の管路系流体関連振動計算

秋村 友香* 大須賀 直子*

Introduction of Pipeline Flow-Induced Vibration Calculations
by the Transfer Matrix Method In Frequency Domain

Yuka Akimura* and Naoko Ohsuka*

アドバンスソフト株式会社では時間領域の1次元管路系流体過渡解析ソフトウェアを使ったプラント関連業務を行っているが、往復動式のポンプや圧縮機を有する管路系の流体関連振動に関する話題がしばしばあがる。時間領域の解法は圧縮性や対流項を考慮しているため解の精度は優れているが、さまざまな周波数に対する解を求めるには非効率であり、共振点では解が発散する。そのため、プラントの安全性検討を行うアプローチの1つとして、周波数領域の1次元解析ツールの開発が望まれている。本稿では、フィージビリティスタディの位置づけで、周波数領域の管路内圧力脈動に関する文献[1][2][3]をレビューした。この解析手法は、従来線形方程式に適用されていた伝達マトリクス法に対し管摩擦の非線形効果を導入して解を得る方法で、共振点近傍の振る舞いをよく再現できる点が優れている。文献を参考にプログラムを開発し、これを使って簡単な計算を行い、入力端に基本波の強制振動がある場合の単管に対する共振倍率の実測値をよく再現することができた。

Key word: 管路系、1次元、流体振動、伝達マトリクス法、等価線形抵抗、共振振幅、往復動圧縮機

1. はじめに

往復動圧縮機などによって周期的に加振される配管系は、運転条件によって気柱共振を起こすことがあり、これを避けるような設計が重要である。往復動圧縮機の圧力脈動の数値計算に関する基準がAPI規格618 (American Petroleum Institute Standard 618, 4th edition, June 1995.)によって整備されるなど[4]、プラントの大型化や複雑化に伴い、流体関連振動(Flow-Induced Vibration)に対する数値計算による検討が近年、重要視されてきている。

アドバンスソフト株式会社で開発・販売を行っている1次元流体過渡解析ソフトウェアAdvance/FrontNet/Tは圧縮性や実流体物性を考慮しており、対流項の高精度差分スキームも有している時間領域の解法のソフトウェアである[5]。

本ソフトウェアを使って共振解析をすることもできる。加振源の角振動数と管内流体の共鳴周

波数がわずかでも異なる場合は、定常計算を行った後にFourier変換を行うことによって加振源に対する管内流体の周波数応答を得ることができる。しかしながら、加振源の角振動数と管内流体の角振動数が一致し共振を起こす場合、圧力が増倍され、解が発散してしまう。このような状況のため、周波数領域の管路系流体振動解析のアプローチによりプラントの共振特性を把握できることが望ましい。共振振動数が不明であり、圧縮性や対流項などの影響を考慮する必要がある場合は、周波数領域の解析で得られた共振点近傍に限り1次元流体過渡解析ソフトウェアを使うという2ステップのアプローチが効率的であろうと思われる。

日本における流体関連振動に関する研究は、1970年代から往復動圧縮機による管路系の流体振動をテーマに始まり[6]、1989年には往復動圧縮機による管路内圧力脈動に焦点を絞った成果報告書がまとめられた[7]。本稿では、成果報告書[7]にまとめられた論文のうち、最も基礎的かつ重要

*アドバンスソフト株式会社 第3事業部

3rd Computational Science and Engineering Group, AdvanceSoft Corporation

な問題に的を絞り、管路とその管摩擦の扱いに着目した葉山らの文献[1][2][3]をレビューすることとした。

流体の基礎方程式における密度変化と対流項を無視し、管摩擦を流速に線形に比例するように近似すると波動方程式の解析解が得られる。通常、管内の波動方程式は双曲線関数で表されることが多い[8][9]。また、波動方程式を解く際に流速に線形に比例する管摩擦を用いた Binder の乱流効果を考慮した方法[10]が従来の主流であったが、この方法では共振点付近の圧力を過大評価してしまうという問題があった。葉山らはこの問題を克服するために、波動方程式ベースではなく差分法をベースとして方程式の離散化を行い、流速の二乗に比例する管摩擦を導入する方法を提案した[1][2][3]。文献[1]では、流速の二乗に比例する非線形減衰を使用して共振点近傍におけるエネルギーバランスから共振振幅を求める方法を提案し、単一正弦波入力に対して実測および理論計算を比較し、その結果が十分妥当であることを確認している。文献[2]では入力波に定常流成分が含まれる場合の影響を検討している。文献[3]では、流速の二乗に比例する非線形減衰を等価な線形減衰に置き換え、伝達マトリクス法によって共振応答を計算するための離散化式が提示され、この計算方法を使った計算結果と実測値がよく一致することが示されている。そこでは、伝達マトリクス法を用いた計算方法が単管のみならず、分岐・合流部やタンク、オリフィスといった流体機器を含む場合にも適用できることが示されている。

本稿では、文献[3]の方法を参考にプログラムを開発し、管摩擦の非線形性を考慮した伝達マトリクス法によって単管の共振点付近の共振振幅の計算を行い、文献[3]の結果を再現した。

本書の構成は以下となる。2章に理論、3章に数値解法、4章に計算例、5章にまとめと今後の課題とした。また、最後に変数一覧と参考文献をまとめる。

2. 理論

2.1. 基礎式

流体の密度 $\rho[\text{kg/m}^3]$ と音速 $a[\text{m/s}]$ が一定とすると、一様断面を持つ配管内流体の運動方程式と連続の式は次のように表される。ここで対流項は無視する。

$$\frac{\rho}{A} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho \lambda}{2DA^2} |q|q = 0 \quad (1)$$

$$\frac{A}{\rho a^2} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \quad (2)$$

のちに説明するように伝達マトリクスの形で圧力と流量を線形に扱うことを目的として、管摩擦に関する式(1)の第3項を形式的に次のように書く。

$$\frac{\rho \lambda}{2DA^2} |q|q = \frac{\rho \mu}{A} q \quad (3)$$

$$\mu \equiv \frac{\lambda}{2DA} |q| \quad (4)$$

ここで、 μ は等価線形抵抗と呼ばれる。運動量保存式は以下のように書ける。

$$\frac{\rho}{A} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho \mu}{A} q = 0 \quad (5)$$

今、管路内の圧力と流量が角振動数 ω で正弦的に振動しているとして、以下の式を仮定する。

$$p = P \exp[i\omega t] \quad (6)$$

$$q = Q \exp[i\omega t] \quad (7)$$

P は複素圧力振幅、 Q は複素流量振幅である。基礎方程式(2)と(5)に代入して時間に関する項 $\exp[i\omega t]$ を除すると以下のように表せる。

$$\frac{\rho}{A} (i\omega Q) + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho \mu}{A} Q = 0 \quad (8)$$

$$\frac{A}{\rho a^2} (i\omega P) = -(i\omega Q) \quad (9)$$

2.2. 等価線形抵抗

運動量保存式(1)にある流速の二乗の項 $|u| u$ について考える。管路の始端で入力流量 $Q_0(t)$

$$Q_0(t) = \bar{Q} + q_0 \sin \omega t \quad (10)$$

が与えられる場合（定常流が存在する場合）を例にとる[2]。管路内の流速を、位相角を θ として次のように表す。

$$u = U + u_1 \sin(\omega t + \theta) \quad (11)$$

ここで、 U は流速の定常流成分、 u_1 は基本波成分である。 $|u|$ をFourier級数を用いて表すと

$$|u| = K_0 U + K_1 u_1 \sin(\omega t + \theta) + \sum_{k=2}^{\infty} \{a_k \sin k(\omega t + \theta) + b_k \cos k(\omega t + \theta)\} \quad (12)$$

ここで、 K_0 、 K_1 は定常流成分および基本波成分の等価線形係数で、次のように与えられる。

$$K_0 = |u_1| k_0 \quad (13)$$

$$K_1 = |u_1| k_1 \quad (14)$$

ただし、 k_0 、 k_1 は $\beta = U/|u_1|$ の関数で、以下のように入与えられる。

$$k_0 = \begin{cases} A & (0 \leq \beta \leq 1) \\ B & (1 < \beta) \end{cases} \quad (15)$$

$$k_1 = \begin{cases} C & (0 \leq \beta \leq 1) \\ D & (1 < \beta) \end{cases} \quad (16)$$

$$A = (2\beta^2 + 1) \frac{\sin^{-1} \beta}{\pi \beta} + \frac{3\sqrt{1-\beta^2}}{\pi} \quad (17)$$

$$B = \beta + 1/2\beta \quad (18)$$

$$C = \frac{4\beta \sin^{-1} \beta}{\pi} + \frac{4}{3\pi} (\beta^2 + 2) \sqrt{1-\beta^2} \quad (19)$$

$$D = 2\beta \quad (20)$$

特に、平均流速に比べて脈動流速が大きいとき、 $\beta \ll 1$ より

$$k_0 \cong \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{6} \beta^2 \right) \quad (21)$$

$$k_1 \cong \frac{8}{3\pi} \left(1 + \frac{3}{2} \beta^2 \right) \quad (22)$$

ゆえに、定常流がない場合、運動量保存式(3)の非線形項は次のように書くことができる。

$$|q|q = \frac{8}{3\pi} |Q|q + \dots \quad (23)$$

$$\mu = \frac{8}{3\pi} \frac{\lambda}{2DA} |Q| \quad (24)$$

2.3. 境界条件

入力流量が行程容積 V_s のピストンの往復によって与えられるとき、流量は次のように表される[1]。

$$q_0 = 0.5V_s \omega_r \quad (25)$$

管路の末端で管路内流体が流出している場合、出口端における圧力と流量の関係は、定常流成分を無視すると次のように書ける。

$$P_{end} = \xi Q_{end} \quad (26)$$

$$\xi = \frac{4\rho\zeta}{3\pi} \frac{|Q_{end}|}{A_{end}^2} \quad (27)$$

ここで、 ζ は正流時の損失係数 ζ^+ と逆流時の損失係数 ζ^- の平均圧力損失係数である。

$$\zeta = \frac{\zeta^+ + \zeta^-}{2} \quad (28)$$

2.4. 共振振幅

管路内の流体が加振源の振動数と同じ振動数で定常振動を行っているとする。振動の1サイクル中に加振源が流体になす仕事は、流体が管路内の流動抵抗によって振動の1サイクル中に失うエネルギーに等しい。この関係を式で表すと、

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_L p q dx dt + \int_0^T (pAu)_{source} dt \\ &= \int_0^T \int_L \frac{\rho A \lambda}{2D} |u|^2 dx dt \\ &+ \sum_i \int_0^T \frac{\rho_i A_i \zeta_i}{2} |u|^2 dt + \int_0^T (pAu)_{exit} dt \end{aligned} \quad (29)$$

ここで、左辺第1項は加振源によって管路内に分布する流体がなす仕事、第2項は管路の始端において加振源から流体が得る仕事、右辺第1項は管摩擦によって失うエネルギー、第2項は管路中に存在する局所損失によって失うエネルギー、第3項は管路の末端において流体を押し出すために費やすエネルギーを表す。

長さ L 、断面積 A の一様な管路の始端に単一正弦波が入力加振され、末端が開端の場合、入力角振動数 ω が管路内流体の r 次の固有角振動数 ω_r に非常に近いとすると、文献[1]より(29)式は次のように表される。

$$\Psi_r = \frac{3\pi}{4} \sqrt{\frac{AD\omega_r}{q_0} \frac{a}{L\omega_r} \frac{1}{\Lambda}} \quad (30)$$

$$\omega_r = \frac{\pi a}{2L} (2r-1), \quad (r=1,2,3,\dots) \quad (31)$$

$$\Lambda = \lambda + \frac{3\pi D}{4L} \zeta \quad (32)$$

Ψ_r は共振倍率と呼ばれる。

3. 数値解法

3.1. 方程式の離散化

基礎方程式(8), (9)を離散化すると

$$i\omega \frac{A}{\rho a^2} P_{i-1} = -\frac{Q_i - Q_{i-1}}{\Delta x} \quad (33)$$

$$i\omega \frac{\rho}{A} Q_i + \frac{P_i - P_{i-1}}{\Delta x} + \frac{\rho \mu}{A} Q_i = 0 \quad (34)$$

ここで、複素圧力振幅 P と複素流量振幅 Q は図 1 のようにスタガード状に定義する。

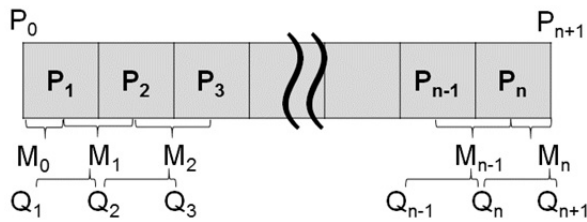


図 1 圧力、流量と伝達マトリクスの定義点

数式を書き換えると

$$Q_i = -i\omega \frac{A\Delta x}{\rho a^2} P_{i-1} + Q_{i-1} \quad (35)$$

$$P_i = \left\{ 1 + \frac{i\omega(\Delta x)^2}{a^2} (\mu + i\omega) \right\} P_{i-1} - (\mu + i\omega) \frac{\rho \Delta x}{A} Q_{i-1} \quad (36)$$

この式は上流側の圧力と流量 P_{i-1}, Q_{i-1} が既知であれば下流側の P_i, Q_i が決まるような形になっている。この関係を行列式で表すと以下のように表せる。このマトリクスは伝達マトリクスと呼ばれている。

$$\begin{pmatrix} P_i \\ Q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{i-1} \\ Q_{i-1} \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$m_{11} = \left(1 - \frac{\omega^2(\Delta x)^2}{a^2}, \frac{\mu\omega(\Delta x)^2}{a^2} \right) \quad (38)$$

$$m_{12} = \left(-\frac{\rho\Delta x}{A} \mu, -\frac{\rho\Delta x}{A} \omega \right) \quad (39)$$

$$m_{21} = \left(0, -\omega \frac{A\Delta x}{\rho a^2} \right) \quad (40)$$

$$m_{22} = (1, 0) \quad (41)$$

この関係を使うと、上流側から順々に伝達マトリクスを乗じることにより、始端と終端の関係式を導くことができる。

$$\begin{pmatrix} P_{out} \\ Q_{out} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} P_{in} \\ Q_{in} \end{pmatrix} \quad (42)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_n \mathbf{M}_{n-1} \cdots \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_0 \quad (43)$$

伝達マトリクス M_0 と M_n は管路のメッシュ長さの $1/2$ に対して定義されていることに注意が必要である。また、圧力点は基本的にはメッシュ中心に定義されているが、 P_0 と P_{n+1} を管の端点にも定義し、配管の長さ全てに対する管摩擦を考慮した。管路の始端条件が決定すれば、各要素の圧力と流量が決定できる。

3.2. 等価線形抵抗の扱い

等価線形係数(24)を離散化し上流側の物理量で表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \mu_i &= \frac{8}{3\pi} \frac{\lambda}{2DA} |Q_i| \\ &= \frac{8}{3\pi} \frac{\lambda}{2DA} \left| -i\omega \frac{A\Delta x}{\rho a^2} P_{i-1} + Q_{i-1} \right| \end{aligned} \quad (44)$$

伝達マトリクスを計算する段階では、物理量は未定のため、収束計算を行う。伝達マトリクス(37)の式では、表面的には圧力 P と流量 Q は線形の関係で表されているが、等価線形抵抗(44)が流量依存となっており、収束計算を行うことによって非線形性を考慮することとなる。

3.3. 境界条件

管路の始端にシリンダが接続されている場合は(25)の条件を与える。式(37)では、圧力、流量ともに右辺は添え字 $i-1$ 、左辺は添え字 i についての式となっており、便宜上、 Q_0 を以下のように定義する。

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

$$m_{11} = \left(1 - \frac{\omega^2(\Delta x/2)^2}{a^2}, \frac{\mu\omega(\Delta x/2)^2}{a^2} \right) \quad (46)$$

$$m_{12} = \left(-\frac{\rho\Delta x}{2A} \mu, -\frac{\rho\Delta x}{2A} \omega \right) \quad (47)$$

$$m_{21} = (0, 0) \quad (48)$$

$$m_{22} = (1, 0) \quad (49)$$

ここで、圧力に関するマトリクスの成分中のメッシュ幅 Δx を半分にとった。管路の終端についても同様の考え方である。数式(42)より伝達マトリ

クスから管路末端および管路始端の圧力と流量が決定する。

3.4. プログラムフローとデータ構造

境界条件と配管を扱うプログラムを開発した。開発言語は fortran90 で、プログラム規模は数百行である。プログラムのフローを図 2 に示す。

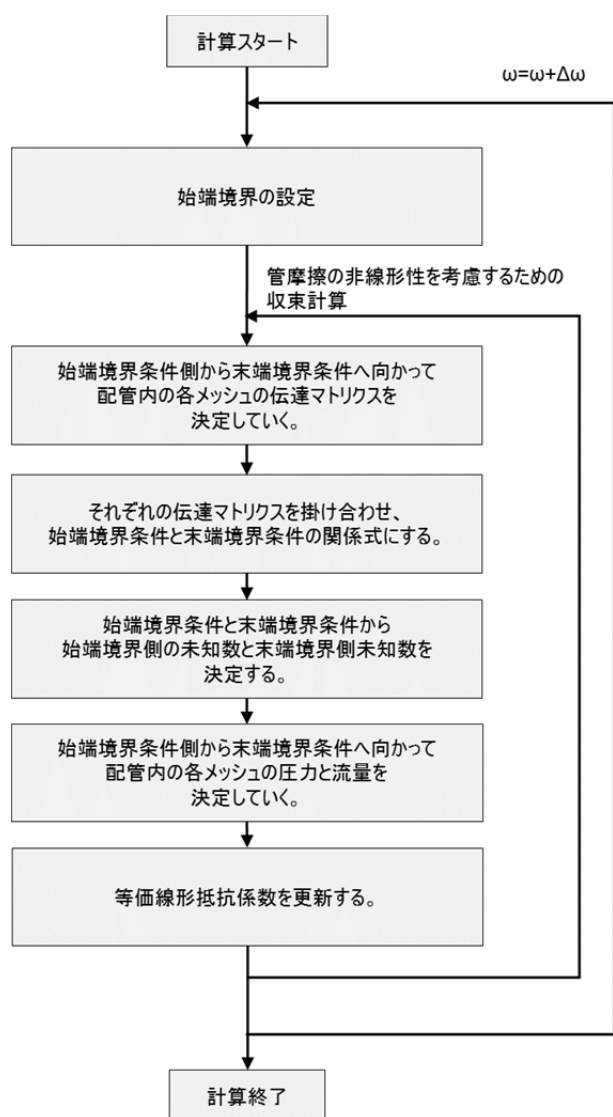


図 2 プログラムのフロー

プログラムのフローにあるように、計算の順序は始端境界条件から末端境界条件への配管の接続順序に依存することが分かる。管路系においてこのようなデータを取り扱うときは、管路系液体過渡解析ソフトウェア Advance/FrontNet/Ω[5]と同様に、配管の流れの方向に向かって配管に i 端, j 端を定義し、配管の i 端側に接続されるノード番

号と j 端側に接続されるノード番号を取得することにより、どの配管がどのような順番で接続されているかをプログラムに認識させると便利である (図 3)。ここで、ノードには境界条件やバルブ、タンク、オリフィスなどが定義され、配管はメッシュ分割することができる。このようなデータ構造を用いることにより、プラントなどの複雑な管路系に対しても接続関係を汎用的に取り扱うことができる。

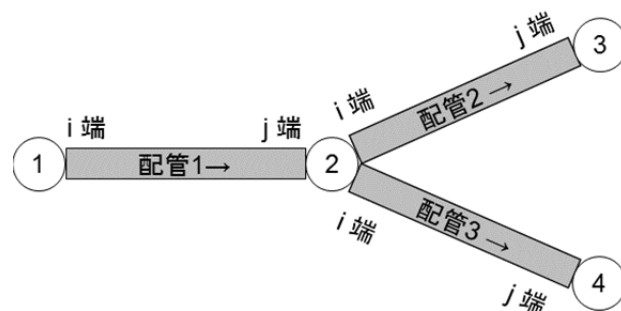


図 3 ノードと配管の i 端と j 端

プログラムのフロー中には、管摩擦の非線形性を考慮するための収束ループがある。ここでは、更新された流量を使って等価線形抵抗係数を更新し、各部の圧力と流量の変化量がなくなるまで計算を繰り返す。

4. 計算例

図 4 のように長さ L 、断面積 A の管路の始端に単一正弦波が入力加振され、末端が開端の場合を考える。本実験装置では、吸・排気弁のついていないシリンダを扱っており、入力流量が行程容積 V_s のピストンの往復によって与えられ、定常流はなく、基本波のみを考慮すればよい[1]。

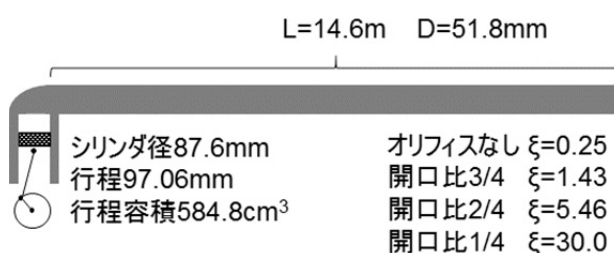


図 4 解析対象

本例題では、管路入口端における共振倍率(30)は式(50)で与えられる[1]。

$$\Psi_r = \frac{|P_{in}|}{\rho a u_{in}} \quad (50)$$

計算条件を表 1 にまとめる。計算負荷が軽いことから、メッシュ分割数を文献[3]の2倍としたが、その他は文献[3]と同一とした。

表 1 計算条件

項目	数値
管長[m]、管径[mm]	14.6、51.8
行程容積[m ³]	584.8×10 ⁻⁶
メッシュ分割数	20
角振動数の刻み幅[rad/s]	(2 π a/2L)×0.01
Darcy の摩擦係数	$\lambda = 0.02$
出口圧損 ζ (オリフィスなし)	0.25
出口圧損 ζ (3/4 オリフィス)	1.43
出口圧損 ζ (2/4 オリフィス)	5.46
出口圧損 ζ (1/4 オリフィス)	30

角振動数の刻み幅は、基本波の波長が 2L であることからこれに対応する角振動数を基準に、波長の 100 分の 1 の刻みとした。Darcy の摩擦係数は参考文献と同じく 0.02 の固定値とした。0.02 は Reynolds 数 6×10⁴(乱流域)に相当する。出口圧損は葉山らによる測定値を使用している[1]。出口部ではオリフィスによる損失の他に速度損失 1 を考慮した。

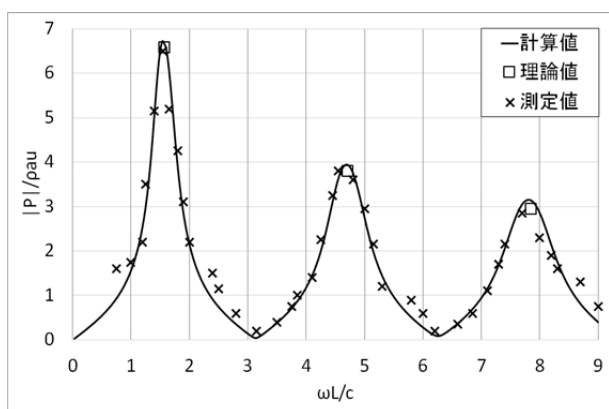


図 5 計算結果 (オリフィスなし)

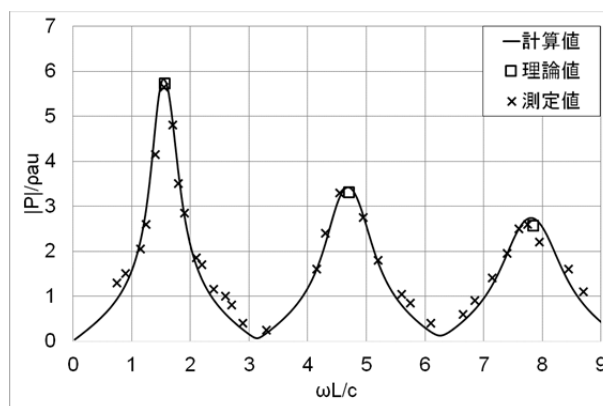


図 6 計算結果 (オリフィスあり、開口比 3/4)

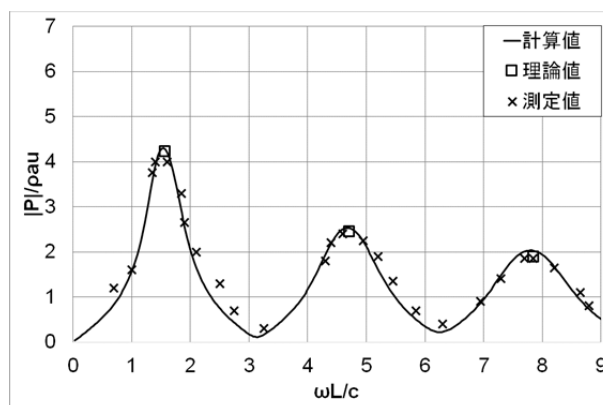


図 7 計算結果 (オリフィスあり、開口比 2/4)

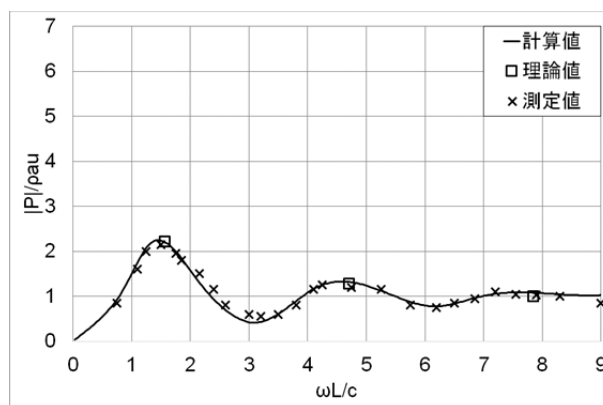


図 8 計算結果 (オリフィスあり、開口比 1/4)

オリフィスなし、開口面積比 3/4 のオリフィスあり、開口面積比 2/4 のオリフィスあり、開口面積比 1/4 のオリフィスありの場合の 4 パターンの計算を実施した。計算結果を図 5～図 8 にまとめる。横軸は無次元振動数、縦軸は共振倍率である。実線が計算結果、□マークが理論値(50)、測定値[3]が×マークで示されている。オリフィスがない場

合に対して、オリフィスを設置すると圧力損失があるため共振振幅は小さくなっている。また、オリフィスの開口比に応じて共振振幅が小さくなる傾向がある。計算は測定値よりも若干高めに出ている。全体的に計算値は理論値および測定値の傾向をよく再現しており、葉山の論文と同等の精度となった。これより、数値計算の定式化およびプログラムの精度が確かめられた。

5. まとめと今後の課題

管路系の流体関連振動に着目し、基礎式の離散化および管摩擦の扱いを葉山の論文[1][2][3]を参考としてこれをレビューした。伝達マトリクス法に基づくプログラムを開発し、単管の共振倍率の計算を行い、計算結果が葉山の論文の結果および測定値をよく再現することを確認した。また、単管の末端にオリフィスが設置されている場合の圧損を考慮し、開口比が3パターンの場合について計算を行い、計算結果の全体的な傾向が測定値を再現することを確認した。

今回は定常流がなく、さらに吸・排気弁がない場合の正弦波を加振源として取り扱ったが定常流が存在する場合や、高周波の加振源についても本スキームをベースとして応用が可能であると考えられる。特に、吸・排気弁がある圧縮機の簡易的な取り扱いは藤川[9]の方法を用いることにより導入可能である。

接続関係の汎用化について検討を行った。実務レベルで利用できるソフトウェアへ向けて、管路系の接続関係の汎用化は今後の課題であるが、これらは管路系流体過渡解析ソフトウェアの実績を基に行うことができると考えられる。また、分岐・合流、タンクなどの流体機器の導入や、ループへの対応も行っていきたい。

アドバンスソフト株式会社で販売・開発を行っている3次元音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise[11]との連成計算を行い、着目部の3次元詳細計算と、そのシステム全体への影響を解析することができると考えられ、ニーズに応じてプログラム開発を行っていく予定である。

今後の開発項目を表2にまとめた。これらを基に、また、顧客の声に応じて展開をしていく。

表2 今後の開発項目

開発項目	内容
分岐・合流 タンクなど	伝達マトリクスの開発
圧縮機	圧縮機モデルの開発
境界条件	大気開放、流量指定、無反射境界
ループ	ループ計算の収束処理の追加
管摩擦	Reynolds 数に依存した管摩擦
接続関係	接続の汎用化
実流体物性	REFPROP ベースの物性
GUI	GUI の開発
気液2相流	流動様式、2相増倍係数、質量流量ベースの式の導入
3次元連成	境界受け渡し処理の開発
構造連成	構造プログラム1Dの開発
API618対応	基準との比較、アウトプット処理

参考文献

- [1] 葉山眞治、毛利泰裕、渡辺辰郎、「管路内圧力脈動の共振振幅（第1報、単一正弦波入力の場合の共振振幅）」、日本機械学会論文集（第1部）、42巻364号（昭和51-12）3825.
- [2] 葉山眞治、竹田博、毛利泰裕、「管路内圧力脈動の共振振幅（第2報、共振振幅に及ぼす定常流成分の影響）」、日本機械学会論文集（C編）45巻392号（昭和54-4）, 422.
- [3] 毛利泰裕、葉山眞治、「管路内圧力脈動の共振振幅（第3報、伝達マトリックスによる一計算）」、日本機械学会論文集（C編）49巻439号（昭和58-3）, 351.
- [4] 配管振動の解析と評価、技術ノート「こべるにくす」、【No.22】 Vol11 2002.OCT
http://www.kobelcokaken.co.jp/tech_library/pdf/no22/b.pdf
- [5] 管路系流体過渡解析ソフトウェア Advance/FrontNet シリーズ：
http://www.advancesoft.jp/product/advance_front

net/

- [6] 事例に学ぶ流体関連振動第2版、日本機械学会編、技報堂出版
- [7] 往復圧縮機による管路内圧力脈動 P-SC105 往復圧縮機・配管系の圧力脈動調査研究分科会 成果報告書、社団法人日本機械学会、(1989).
- [8] Streeter U. L and Wylie. E. B. (竹中訳), 流体過渡現象, (昭 48), 121, 日本工業新聞社.
- [9] 藤川猛、配管系の振動解析法に関する研究、大阪大学、(1976).
- [10] Binder. R. C., J. Acous. Soc. Amer., 15-1 (1943-7), 41.
- [11] 音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise:
http://www.advancesoft.jp/product/advance_front_noise/

※ 技術情報誌アドバンスシミュレーションは、アドバンスソフト株式会社 ホームページのシミュレーション図書館から、PDF ファイルがダウンロードできます。(ダウンロードしていただくには、アドバンス/シミュレーションフォーラム会員登録が必要です。)

表 3 主要変数一覧

変数	意味
i	虚数単位 $i = \sqrt{-1}$
D	配管内径[m]
A	配管断面積[m ²]
ρ	流体密度[kg/m ³]
q	体積流量[m ³ /s]
u	流速[m/s]
p	圧力[Pa-abs]
t	時間[s]
T	振動周期[s]
x	管路に沿った座標[m]
λ	Darcy の摩擦係数[-]
μ	等価線形抵抗
a	流体の音速[m/s]
ζ, ζ	局所抵抗係数
P	複素圧力振幅[Pa-abs]
Q	複素体積流量振幅[m ³ /s]
ω	入力源の角振動数[rad/s]