

音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoiseへの無限要素の導入

松原 聖* 尾川 慎介**

Infinite Element scheme in Advance/FrontNoise

Kiyoshi Matsubara* and Shin'suke Ogawa**

音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise は有限要素法に基づくソフトウェアである。近年は大規模問題に対する高速な処理が可能であることから、音響解析には有限要素法が利用されている。しかし、有限要素では外部問題が不得手であるという欠点があった。今回はその欠点を補うことを目的として、放射など外部問題（3次元無限領域問題）を解くために、従来の有限要素解析に対して無限要素機能を導入した。無限要素を利用することにより、これまでより高速に外部問題を解くことができるようになり、有限要素の格子を設定した以外の領域の観測点においても、音圧や粒子速度の物理量を得ることができるようになった。本稿では、無限要素の原理とその使い方、および、精度・処理速度等のテスト結果を示す。それらにより、有限要素法のソフトウェアが外部問題に対して有効であることを示し、大規模問題に対しても適用可能であることを実証した。

Key word: 音響解析、有限要素法、無限要素、放射問題、外部問題

1. はじめに

1.1. 無限要素の位置付け

有限要素のみを利用した音響解析では、放射問題を音響インピーダンスが ρc の境界を外部境界に設定することで音の透過をモデル化してきた。このモデル化では、 ρc 境界では垂直に入射する音が完全に透過するという原理を利用していた。従って、斜めに入射する音は完全に透過しないことに注意が必要であった。また、当然ながら、物理量を得ることができるのは有限要素法の解析領域内部においてのみである。一方で、境界要素法では原理的に放射音の取り扱いを得意としており、任意の観測点における物理量を得ることができた。しかし、温度や速度が不均一な音場および厚みを持った吸音材等を取り扱うことができないという欠点があった。

有限要素法に無限要素を導入することで、有限

*アドバンスソフト株式会社 代表取締役社長

President, AdvanceSoft Corporation

**アドバンスソフト株式会社 第1事業部

1st Computational Science and Engineering Group,
AdvanceSoft Corporation

要素法の利点を生かしつつ、外部問題を解くことが可能となる。無限要素とは、通常の有限要素法で利用する要素の一種であり、その要素の支配領域は無限遠点もカバーする。また、無限要素の導入により、無反射境界の取り扱いが正確になるのみならず、有限要素領域の外（無限要素の内部）における物理量を求めることができるようになった。表1に、有限要素法(FEM)、無限要素が利用可能な有限要素法(FEM+IE)、境界要素法(BEM)の特徴をまとめた。

表1 各手法の特徴

項目	FEM	BEM	FEM+IE
処理速度	○	△	○
使用記憶容量	○	△	○
内部問題	○	○	○
外部問題	△	○	○
温度速度不均一	○	×	○
吸音材厚みあり	○	×	○
大規模問題	○	×	○

※FEM：有限要素法、BEM：境界要素法、

FEM+IE：無限要素が利用可能な有限要素法

1.2. 無限要素の特徴

無限要素を利用する目的は、①無反射境界をモデル化すること、②遠方での物理量を求めること、を実現することである。

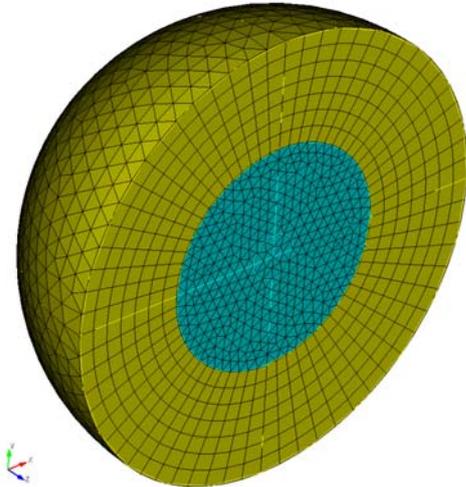


図 1 FEM 領域を取り囲む無限要素のイメージ

無限要素の導入に伴い①の特徴により有限要素の解析領域を大幅に小さくすることができることから、メッシュの数を節約することができる。従って、同程度の精度で処理速度を向上させることが可能となる。言い換えると、同程度の処理速度で精度を向上させることができるともいえる。さらに、②の特徴により無限要素内の物理量を算出できることから、遠方での物理量を容易に算出できるようになった。境界要素法では遠方での物理量を求めるために、解析に先立ってその点を決定しなければならない。しかし、有限要素法と無限要素の組み合わせでは解析結果を得たのちに、後処理として観測点の位置を自由に設定することができる。

1.3. 無限要素の設定方法

無限要素の設定は、従来の有限要素解析領域に対して放射を指定したい境界において無限要素を貼り付ける面を指定することになる。従来の境界条件の設定と同じ方法で、無限要素を貼り付ける面を設定する。その設定により、プログラム内で完全に自動的に無限要素を生成する。ただし、無限要素を貼り付ける境界面は球面の一部であ

る必要があり、ユーザーは球面の半径と中心位置を指定する。さらに、無限要素を設定する境界では外向きの進行波しかないという仮定をしているため、球面内部に音源はすべて含まれるという前提条件が必要となり。ソフトウェア内部で自動生成する無限要素は、境界となった球面上にすでに存在する三角形メッシュを底面とし、無限大に方向に硬さを設定した三角柱台（プリズムのどちらかの底面が広がった形状）となる。無限要素が自動生成されるとともに、無限要素の節点位置も自動的に設定される。無限要素の節点は境界となる球面の比較的近傍にのみ設定するが、無限要素の理論上では無限遠点までの領域を計算対象としている。三角柱台の形状をした無限要素側面のエッジは、それを2方向に延長すると球の中心を通る直線となり。さらに、その直線の一方は無限円点に向いていることに注意しておく。

1.4. 本書の構成

本書において、まず、2 節で基礎方程式と無限要素の離散化の方法について述べ、3 節ではソフトウェアの基本的な使用方法について示す。4～6 節では、3 つの基本的なテストを示す。まず、4 節で示すテストでは、無限に広がる空間に点音源を設定した例題で解析結果と理論解を比較する。次に、5 節ではダクトから放射される音の出口における反射率の解析に無限要素を利用する。ダクトの先端に球面上に無限要素を貼り付けた形状を利用して解析を行う。このケースについても反射率については4 節と同様に理論解が存在し、解析結果と理論解を比較する。6 節では球面の一部を音源（振動する面）とした放射問題を解析した。ここでは、いくつかの解析パラメータを変更してその感度解析を実施した結果を示す。最後に7 節で無限要素の有用性についてまとめた。

2. 無限要素の定式化

2.1. 定式化の概要

音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise は四面体ソルバーである。放射条件を設定すべき球面上の境界において、その面上の三角形メッシュを

底面とする三角柱台の無限要素を生成する。無限要素に属する節点は有限な範囲にのみ設定する。無限要素の側面エッジは、無限要素を貼り付けた球面の中心を通る直線上に含まれる。すなわち、そのエッジは放射の方向に向いている。無限要素では、エッジ上に等間隔に q 個の節点（無限要素の放射方向節点）を設け、そこで物理量が定義される。球面から q 番目の節点までの距離は、最適な値をデフォルト値として用意するが、入力データで指定することもできる。

次に無限要素における補間について述べる。無限要素の断面となる三角形面内では、テトラ要素の面内で利用している三角形の面積補間を利用する。また、放射方向（無限要素の側面エッジの方向）には、Legendre 多項式で補間する。この関数を利用して無限要素内では、面積補間と Legendre 多項式の積で形状関数を定める。有限要素の離散化における変分操作で利用するテスト関数は、無限遠方で十分な大きさを減少するファクターを乗じた関数形を利用する。離散化の最終段階における無限要素での積分は、無限領域での積分となる。本定式化では、無限領域の積分を変数変換で有限区間の積分に変換したうえで積分する。積分の手法では、Gauss-Legendre の積分を利用する。ここで利用する Gauss-Legendre の積分においては、十分な積分次数を設定することにより、数値積分の値と連続関数を積分した理論値とが完全に一致するようにする。

2.2. 無限遠点を含む基礎方程式

基礎方程式（Helmholtz 方程式）に無限遠点での境界条件（Sommerfield Radiation Condition）を課した式が基礎式となる。すなわち、

$$\text{div}(\text{grad } \varphi) + k^2 \varphi = 0 \quad (1)$$

$$r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} + ik\varphi \right) \rightarrow 0 \quad \text{as } r \rightarrow \infty \quad (2)$$

を無限要素を利用して解く。ここで、無限遠点での境界条件は、放射源から十分に離れた場所 $r = R$ において、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -ik\varphi \quad \text{at } r = R \rightarrow \infty \quad (3)$$

として取り扱う。

2.3. 離散化

無限要素を含む離散化の手順は通常の有限要素法と同様である。すなわち、テスト関数を乗じて発散定理を利用して展開し、その後に物理量を形状関数で近似した式を代入して、積分を離散化を行う。

まずは、基礎方程式にテスト関数 $w_j(x)$ を乗じて、無限要素内で積分する。2 階の微分項に 1 回だけ発散定理を適用し、面積分を境界条件を用いて変形する。符号に注意しながら、

$$-\int_{\Omega} \text{grad}(w_j(x)) \text{grad}(\varphi(x)) dv + k^2 \int_{\Omega} w_j(x) \varphi(x) dv = ik \int_{\partial\Omega} w_j(x) \varphi(x) ds \quad (4)$$

となる。ここで、物理量を無限要素内の節点 i における形状関数 $N_i(x)$ で表現した式

$$\varphi(x) = \sum_i \varphi_i N_i(x) e^{ik(r-r_i)} \quad (5)$$

を代入する。ここで、 φ_i は無限要素内の節点 i における音響速度ポテンシャルであり、 r は無限要素の原点から点 x までの距離である。また、 r_i は無限要素内の節点 i と無限要素の原点の距離である。形状関数 $N_i(x)$ は、外部放射音の音圧が Atkinson-Wilcox 展開の形式

$$p(x) = e^{ikr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(\theta, \phi, \omega)}{r^n} \quad (6)$$

で表現できることに基いて決定する。ここで、この級数は $n=1$ から開始することに注意する。また、通常の文献とは、 e^{ikr} と e^{-ikr} が異なっているが、それは、本ソフトウェアは、[1]の定式化を利用していることに基いている。この事実を利用して形状関数の具体的な関数形は $1/r$ に関する Legendre の多項式となる。物理的な意味は $1/r$ に関する無限級数を有限項で打ち切った $1/r$ の多項式である。すなわち、

$$N_i(x) = \frac{r_i}{r} \prod_{i \neq j} \left(\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_j}}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_j}} \right) \quad (7)$$

とする。通常の Legendre 多項式の前に $1/r$ の項が乗じていることは、Atkinson-Wilcox 展開が $n=1$ から開始していることによる。プログラム内で利用する式はこれを単純に変形して、

$$N_i(x) = \left(\frac{r_i}{r} \right)^q \prod_{i \neq j} \left(\frac{r_j - r}{r_j - r_i} \right) \quad (8)$$

としている。もちろん、この関数は、形状関数として必要な

$$N_i(r_j) = \delta_{i,j} \quad (9)$$

を満たすことが確認できる。

これらの準備をもとに、無限要素の定式化を行う。物理量を形状関数の形式で代入すれば、

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \text{grad}(w_j(x)) \text{grad} \left(\sum_i \varphi_i N_i(x) e^{ik(r-r_i)} \right) dv \\ & + k^2 \int_{\Omega} w_j(x) \sum_i \varphi_i N_i(x) e^{ik(r-r_i)} dv \\ & = ik \int_{\partial\Omega} w_j(x) \sum_i \varphi_i N_i(x) e^{ik(r-r_i)} ds \end{aligned} \quad (10)$$

となる。被積分項を整理して、

$$\begin{aligned} & - \sum_i \varphi_i \int_{\Omega} \text{grad}(w_j(x)) \text{grad}(N_i(x) e^{ik(r-r_i)}) dv \\ & + k^2 \sum_i \varphi_i \int_{\Omega} w_j(x) N_i(x) e^{ik(r-r_i)} dv \\ & = ik \sum_i \varphi_i \int_{\partial\Omega} w_j(x) N_i(x) e^{ik(r-r_i)} ds \end{aligned} \quad (11)$$

である。一般的にテスト関数については任意性があり、ここではテスト関数を

$$w_j(x) = D_j(x) N_j(x) e^{-ik(r-r_j)} \quad (12)$$

として定義する。ここで

$$D_j(x) = \frac{r_j^2}{r^2} \quad (13)$$

とする。 $D_j(x)$ をこの関数として定義することに

より、無限要素内での積分が収束するための条件を満たす。以上を用いて、

$$A) \quad - \sum_i \varphi_i \int_{\Omega} \text{grad}(w_j(x)) \text{grad}(N_i(x) e^{ik(r-r_i)}) dv \quad (14)$$

$$B) \quad k^2 \sum_i \varphi_i \int_{\Omega} w_j(x) N_i(x) e^{ik(r-r_i)} dv \quad (15)$$

$$C) \quad ik \sum_i \varphi_i \int_{\partial\Omega} w_j(x) N_i(x) e^{ik(r-r_i)} ds \quad (16)$$

を要素内で書き下す。

2.4. プログラムで利用する式

本節では、具体的にソフトウェアの内部で利用している式について説明する。以下では、簡略化のため grad を ∇ と書くこともある。まず、A)項の被積分項は、

$$\begin{aligned} & \nabla(D_j(x) N_j(x) e^{-ik(r-r_j)}) \nabla(N_i(x) e^{ik(r-r_i)}) \\ & = \\ & (\nabla D_j(x) N_j(x) + D_j(x) \nabla N_j(x)) \nabla N_i(x) e^{-ik(r-r_j)} \\ & - ik D_j(x) N_j(x) \nabla N_i(x) e^{-ik(r-r_j)} \\ & + ik (\nabla D_j(x) N_j(x) + D_j(x) \nabla N_j(x)) N_i(x) e^{-ik(r-r_j)} \\ & + k^2 D_j(x) N_j(x) N_i(x) e^{-ik(r-r_j)} \end{aligned} \quad (17)$$

となる。ここでは、

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad (18)$$

であるため、

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \quad (19)$$

と考えても問題ないことを利用している。従って、

$$A) \text{は} \quad \sum_i \varphi_i e^{-ik(r-r_j)} \int_{\Omega} (a + ikb + k^2c) dv \quad (20)$$

と書くことができ、それぞれの係数は、

$$a = \nabla D_j(x) N_j(x) \nabla N_i(x) + D_j(x) \nabla N_j(x) \nabla N_i(x) \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
b &= -D_j(x)N_j(x)\nabla N_i(x) \\
&+ \nabla D_j(x)N_j(x)N_i(x) + D_j(x)\nabla N_j(x)N_i(x)
\end{aligned} \quad (22)$$

$$c = D_j(x)N_j(x)N_i(x) \quad (23)$$

とまとめることができる。次に、B)については、

$$\begin{aligned}
&k^2 \sum_i \varphi_i \int_{\Omega} D_j(x)N_j(x)e^{-ik(r-r_j)}N_i(x)e^{ik(r-r_i)}dv \\
&= \sum_i \varphi_i e^{-ik(r_i-r_j)} \int_{\Omega} k^2 D_j(x)N_j(x)N_i(x)dv
\end{aligned} \quad (24)$$

となる。また、C)については、

$$\begin{aligned}
&ik \sum_i \varphi_i \int_{\partial\Omega} w_j(x)N_j(x)e^{ik(r-r_i)}ds \\
&= \sum_i \varphi_i e^{-ik(r_i-r_j)} \int_{\partial\Omega} ik D_j(x)N_j(x)N_i(x)ds
\end{aligned} \quad (25)$$

である。従って、すべての項を $\sum_i \varphi_i e^{-ik(r_i-r_j)}$ の形で整理できたため、無限要素の要素行列 $E_{i,j}$ を定義できる。最終的には k に着目して次のように整理する。

$$E_{i,j} = e^{-ik(r_i-r_j)} (K_{i,j} + ikC_{i,j} + k^2M_{i,j}) \quad (26)$$

$$K_{i,j} = - \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \nabla D_j(x)N_j(x)\nabla N_i(x) \\ + D_j(x)\nabla N_j(x)\nabla N_i(x) \end{pmatrix} dv \quad (27)$$

$$C_{i,j} = \int_{\Omega} \begin{pmatrix} D_j(x)N_j(x)\nabla N_i(x) \\ - \nabla D_j(x)N_j(x)N_i(x) \\ - D_j(x)\nabla N_j(x)N_i(x) \end{pmatrix} dv \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
&- \int_{\partial\Omega} D_j(x)N_j(x)N_i(x)ds \\
M_{i,j} &= \int_{\Omega} \begin{pmatrix} -D_j(x)N_j(x)N_i(x) \\ + D_j(x)N_j(x)N_i(x) \end{pmatrix} dv
\end{aligned} \quad (29)$$

ここに示した各項を計算することで、要素行列をプログラム内で求めることができる。その計算において利用する式を示す。

$$D_j(x) = \frac{r_j^2}{r^2} \quad (30)$$

$$\nabla D_j(x) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r_j^2}{r^2} \right) = -\frac{2r_j^2}{r^3} \quad (31)$$

$$N_i(x) = \left(\frac{r_i}{r} \right)^q \prod_{i \neq j} \frac{(r_j - r)}{(r_j - r_i)} \quad (32)$$

$$\nabla N_i(x) = \frac{N_i(r + \varepsilon) - N_i(r)}{\varepsilon} \quad (33)$$

Legendre 多項式は当然微分することができるが、本処理ではプログラム内での演算数を考慮して数値微分で求めることにした。ここで、 ε は相対値で $1.0e-5$ 程度を想定している。

2.5. 無限要素における積分

まず、最初に無限要素における

$$\int_{\partial\Omega} D_j(x)N_j(x)N_i(x)ds \quad (34)$$

について評価しておく。 $\partial\Omega$ は、有限要素との境界面、無限要素との境界面、無限大に位置する境界面の3類から成る。ここで前者2つの積分については、通常の有限要素法と同じくここで計算しておく必要はない。ここでは、後者1つの面の境界積分について評価しておく。以下、本節では $\partial\Omega$ をここでの検討対象とする面のみを意味するものとする。無限要素は三角柱台であり、有限要素との境界の三角形（三角柱の底面）の面積を A とし、無限要素と有限要素の境界となる球の半径を a とする。これらの量を用いて、 $\partial\Omega$ は三角柱の底面を r/a で相似拡大した面であり、その面積は、

$$A \left(\frac{r}{a} \right)^2 \quad (35)$$

である。従って、この面積分は

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} D_j(x)N_j(x)N_i(x)ds \\
&= \left[A \left(\frac{R}{a} \right)^2 \frac{r_j^2}{R^2} \left\{ \left(\frac{r_i}{R} \right)^q \prod_{i \neq j} \frac{(r_j - R)}{(r_j - r_i)} \right\}^2 \right]_{R \rightarrow \infty} \\
&\approx A \left[\frac{1}{R^2} \right]_{R \rightarrow \infty} \rightarrow 0
\end{aligned} \quad (36)$$

となり、無限遠点では0となる。この事実はテス

ト関数の設定に起因している。

次に、無限要素における残りの積分を評価する。これらの積分は、すべて

$$\int_{\Omega} F(x) dv \quad (37)$$

の形をしており無限要素内での無限領域での体積積分となっている。ここで、 Ω の形は三角柱台であり、底面を三角形として高さが無限に高く、無限遠点に近づくとその面積が広がっていく領域内での無限領域での積分である。以下では、この積分を評価するために、いくつかの変数変換をしながら、最終的には Gauss-Legendre の数値積分に持ち込む。

まず、体積積分を三角形の面方向と半径方向の積分に分離する。面方向では関数の値を積分した値は中央の値で代表されること、また、その面積は、

$$A\left(\frac{r}{a}\right)^2 \quad (38)$$

で表すことができること、および、 a は無有限要素を貼り付けた面の半径としていることから、次のように変形できる。

$$\int_{\Omega} F(x) dv = \int_a^{\infty} \int_{\Omega} F(x) ds dr = \int_a^{\infty} A\left(\frac{r}{a}\right)^2 F(r) dr \quad (39)$$

次に

$$r = \frac{1}{s}, \quad dr = -\frac{1}{s^2} ds \quad (40)$$

の変数変換を行うと、

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty} A\left(\frac{r}{a}\right)^2 F(r) dr &= -\int_{1/a}^0 A\left(\frac{1}{sa}\right)^2 F\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{s^2} ds \\ &= \int_0^{1/a} A\left(\frac{1}{sa}\right)^2 F\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{s^2} ds \end{aligned} \quad (41)$$

となる。さらに、

$$s = \frac{t+1}{2a}, \quad ds = \frac{1}{2a} dt \quad (42)$$

の変数変換を行う。この積分は

$$\begin{aligned} &A \int_0^{1/a} \left(\frac{1}{sa}\right)^2 F\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{s^2} ds \\ &= A \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{t+1}\right)^2 F\left(\frac{2a}{t+1}\right) \frac{(2a)^2}{(t+1)^2} \frac{1}{2a} dt \\ &= 8aA \int_{-1}^1 \frac{1}{(t+1)^4} F\left(\frac{2a}{t+1}\right) dt \end{aligned} \quad (43)$$

と変形できる。プログラムでは、処理の都合上、

$$\frac{8aA}{(t+1)^4} = \frac{8aAr^4}{(2a)^4} = A\left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{r^2}{2a} \quad (44)$$

を利用していることを参考までに付け加えておく。すべての積分にこの式を利用する。

次に、この被積分関数について考察する。被積分関数である $F(r)$ は、いずれも $D_j(r)$ またはその微分を1回とさらに $N_j(r)$ またはその微分を2回、合計3つの項の積である。 $D_j(r)$ またはその微分は、その定義から $1/r$ の最低次数が2次以上の多項式である。さらに、 $N_j(r)$ またはその微分は、その定義から $1/r$ の最低次数が1次以上の多項式である。従って、 $F(r)$ は $1/r$ の最低次数が4次以上の多項式である。すなわち、「被積分関数である $r^4 F(r)$ は $1/r$ の多項式である」といえる。この表現を、

$$\frac{1}{r} = \frac{t+1}{2a}, \quad r = \frac{2a}{t+1} \quad (45)$$

を用い言い直すと、

$$\frac{1}{(t+1)^4} F\left(\frac{2a}{t+1}\right) = \frac{1}{(2a)^4} r^4 F(r) \quad (46)$$

より、「 $\frac{1}{(t+1)^4} F\left(\frac{2a}{t+1}\right)$ は $(1+t)$ の多項式である」といえる。これは、「 $\frac{1}{(t+1)^4} F\left(\frac{2a}{t+1}\right)$ は t の多項式である」ことになる。従って、

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(t+1)^4} F\left(\frac{2a}{t+1}\right) dt \quad (47)$$

における被積分関数は、 t の多項式であるということがいえる。ここで、 $2n-1$ 次の多項式については、 n 点の Gauss-Legendre の数値積分を用いる

ことで誤差のない数値積分が可能である（連続的な積分と離散的な総和が完全に一致する）事実を利用すると、適切な点数の Gauss-Legendre 積分を適用することで、これら積分の値を正確に計算できる。すなわち、理論的にも誤差がなく数値積分で評価できることが分かる。無限要素の放射方向節点数を q 点とすると、被積分関数の次数は $2q-3$ である。これは、 $D_j(x)$ のオーダーは 2、 $N_j(x)$ のオーダーは q であることから、被積分関数の次数は、

$$2 + 2q - 1 - 4 \quad (48)$$

となる。3 項めの「-1」は被積分関数はいずれかの項を微分されていることに起因する。4 項目の「-4」は $1/(t+1)^4$ に起因する。従って、

$$2q - 3 \leq 2n - 1 \quad (49)$$

すなわち、

$$q - 1 \leq n \quad (50)$$

を満たせば、正確な数値積分が可能である。ここまで述べた事実から適切な n を選択し、

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(t+1)^4} F\left(\frac{2a}{t+1}\right) dt = \sum_k w_k \frac{1}{(t_k+1)^4} F\left(\frac{2a}{t_k+1}\right) \quad (51)$$

として積分の計算を行う。ここで、 w_k と t_k は、Gauss-Legendre の積分点数で自動的に定数として決定できる重みと関数の評価点である。以上まとめると、すべての積分が

$$\int_{\Omega} F(x) dv = \sum_k w_k \frac{8aA}{(t_k+1)^4} F\left(\frac{2a}{t_k+1}\right) \quad (52)$$

として計算可能である。この等号は近似式として成立する等号ではなく、厳密に両辺が一致することに注意しておく。

2.6. 定式化のまとめ

無限点を含む基礎方程式と境界条件を記述し、無限要素での離散化を行った。離散化で求めた要素行列を数値積分で評価してプログラムで計算

できる量にした。この要素行列を、有限要素法で作成する全体行列に足し込むことで、無限要素を含めた有限要素解析が可能となる。

無限要素の数は、放射境界と指定した境界面の三角形の数と一致する。また、ユーザーの指定する無限要素の放射方向節点数 q とすると、有限要素法で求める音響速度ポテンシャルの定義される節点数は、境界面の三角形を構成する節点数に q を乗じた数だけ増加する。

実際に解析を行う場合における無限要素の導入による処理時間の増加、収束性および推奨する q の値については、テストの節で述べる。

3. 無限要素の使用法

3.1. 使用方法の概要

無限要素を利用した解析を行う場合には、無限要素をユーザーが意識して作成する必要はなく、境界条件の代わりに無限要素を貼り付ける面を指定することで、無限要素はプログラム内部で自動生成される。

本ソフトウェアでは、従来から入力データとして、格子ファイル (*.inp)、解析条件ファイル (*.dat)、境界条件ファイル (*.bcs, *.bcv)、点音源ファイル (*.bcn, *.bcq) を指定してきた。無限要素を利用する場合には、従来のデータに加え、無限要素を貼り付ける面については、従来から指定していた境界条件ファイル (*.bcs) のデータに対して「無限要素の貼り付け」を指定することで利用可能となる。新規に必要なデータは、無限要素の計算用制御データ (*.ied) のみである。また、出力に関しても、既存の機能と同じように利用できるとともに、ポスト処理で指定する観測面における物理量を求めることができる。

3.2. 入力方法

無限要素用制御データは拡張子を `ied` とし、このデータには無限要素を貼り付ける境界面番号とその境界面の球の中心と半径を記述する。このうち、境界面番号については、従来の境界条件ファイルである *.bcs のうちの境界番号を指定する。ただし、この面は球表面の一部である必要がある。

この面が球面になっているかどうかは、プログラムでチェックされメッセージが出力される。次に球の中心と半径については、m 単位で指定する。ここまでが必須で指定するデータである。オプションデータとして、無限要素の放射方向節点数と、その節点の配置比率を指定することができる。無限要素の放射方向節点数についてはデフォルト値として $q=5$ としている。また、節点配置のデフォルトは、最も球に近い節点位置を 1.0 とした場合に、0.5 刻みの値としている。通常はこのデフォルト値で問題ない。

```
1  ←無限要素を貼り付ける境界面の数
2  0.0 0.0 0.0 0.0 0.5
↑ 境界面番号、球の中心・半径
```

図 2 無限要素用制御データ例 (*.ied)

3.3. 実行方法

無限要素のための入力データを用意し、無限要素解析用の環境変数を設定し、既存と同様の方法で実行する。もちろん、従来の方法での並列実行も可能である。

無限要素では、指定した境界が球面上にあることが要請される。この条件を満たしているかどうかを標準出力に示す。ここでは、その境界節点と球中心の距離の平均値、入力で指定している球の半径を出力する。また、節点中心間距離と入力した半径の最大差異および分布の標準偏差を出力する。その双方の差異が大きい場合には計算が正しく動作することが保証されないが、処理は継続実行される。

```
% ls ie01.*
ie01.bcs ie01.bcv ie01.dat ie01.ied ie01.inp
% export FNFEM_INFINITE=ON
% mpirun -np 24 fnfem < ie01.dat
```

図 3 実行方法

```
.....
- number of nodes .....: 37142
- number of elements .....: 196198 .....
.....
< infinite element >
- number of surface : 1
- surface number : 2
```

```
- origin-X of ie : 0.000000E+00
- origin-Y of ie : 0.000000E+00
- origin-Z of ie : 0.000000E+00
- radius of ie surface : 1.000000E-01
- ie surface information :
  > m, average, radius : 1 1.000D-01 1.000D-01
  > std. dev. max err. elem.: 1.003D-08 6.929D-09 136391
- number of nodes in IE : 5
- dim. in Gauss Integral : 4
- node coordinate in IE :
  1.00000000E+00 1.50000000E+00 2.00000000E+00 .....
- number of IE surfaces : 3112
- number of IE surf. nod : 1565
- number of IE all node : 6260
- gauss coef. in IE :
  -8.61136312E-01 -3.39981044E-01 3.39981044E-01 8.61136312E-01
  3.47854845E-01 6.52145155E-01 6.52145155E-01 3.47854845E-01
  .....
```

図 4 実行時の無限要素の標準出力

(太字が無限要素を貼り付けた面に関する情報)

3.4. 出力方法

3.4.1. 出力ファイル

解析結果が出力されるファイル (*.rsl) は従来のファイル形式を拡張した形式となっているため、有限要素に対しては従来通りの既存の可視化機能の利用ができる。すなわち、*.rsl には、無限要素の解析結果の情報を含むが、これまでの出力ファイルの処理には影響を与えない。

また、無限要素に関連するツールが、必要に応じてバイナリのファイルを参照して無限要素の可視化等を行う。ここでは、無限要素の解析結果を取り出すためのデータが出力され (*.ier)、無限要素境界面の節点情報、無限要素の節点番号等が出力される。*.ier と *.rsl の結果と合わせることで、ポスト処理で指定する観測面 (点) における物理量を求めることができる。もちろん観測面 (点) は有限要素の内部に限らず、遠方を指定しても問題ない。これが無限要素のひとつの特長である。

3.4.2. 観測面 (点) での結果を得る方法

(1) 概要

無限要素を境界に貼り付けた有限要素解析では、有限要素で定義できる解析領域の外においてもその場所での物理量 (音圧と音響速度ポテンシャル) を得ることができる。言い換えると無限要素の内部 (有限要素領域の外部領域、すなわち、放射問題における外部領域) の物理量を求めるこ

とができる。

境界要素法では、解析実施前にあらかじめ観測点を指定しておく必要がある。しかし、無限要素を利用した有限要素法では、解析終了後に観測点を指定することが可能となる。これは、無限要素を利用した有限要素法の大きなメリットとなる。

(2) 機能

無限要素を利用した解析を実行したのち、任意の観測面および観測点の解析結果を求めることができる。言い換えれば、無限要素を利用した解析においては、ユーザーが見たい観測点を意識することなく実行できる。それぞれの観測点では、音響速度ポテンシャル(実数部、虚数部、大きさ)、音圧(実数部、虚数部)、音圧レベルを求めることができる。

観測点の指定および出力については、観測面モードと観測点モードがある。観測面モードでは、面の可視化ファイルを指定し、その面での結果を含む可視化ファイルを出力する。観測点モードでは、観測点の座標をテキストデータで入力し、対応する観測点毎の結果をテキストデータとして出力する。

(3) 処理内容

本コマンドの処理では、まず最初に、指定された観測点が次の3つにどれに相当するかを判定する。

- ① 有限要素の領域内(領域フラグが1として出力される)
- ② 無限要素の領域内(領域フラグが2として出力される)
- ③ 有限要素内でも無限要素内でもない領域(領域フラグが3として出力される)

まず、①の有限要素領域内の場合には、観測点に対してその点を含む要素内で、物理量は形状関数を利用して補間することで求められる。有限要素で利用される形状関数を N_i とした場合に、例えば音圧であれば

$$p(x) = \sum_i p_i N_i(x) \tag{53}$$

として求めることができる物理量である。次に、②の無限要素内の領域とは指定した有限要素境界から無限遠点まで続く領域であり、たとえ

どんなに遠方の観測点を指定しても無限要素内に含まれていれば、結果が計算されて出力される。無限要素内の物理量の補間の原理は、有限要素内と同じであり、その補間関数で計算する。すなわち、

$$p(x) = \sum_i p_i N_i(r) e^{ik(r-r_i)}, \quad r = r(x) \tag{54}$$

で求めることができる。詳細は付録に記載したが、 r は無限要素の座標系であり、 N_i は $1/r$ に関する q 次のLegendreの多項式に $1/r$ を乗じた関数である。

最後に、③の有限要素内でも無限要素内でもどちらでもない領域については、領域フラグが3として出力される。ユーザーが観測点として値を得られる場所がこの領域に含まれる可能性もあるため、念のため、解析結果での領域フラグを確認することを推奨する。この領域では、物理量を無限要素内と同様に

$$p(x) = \sum_i p_i N_i(x) e^{ik(r-r_i)} \tag{55}$$

として求める。ただし、上式の総和記号内の r のみを観測点の値を利用し、その他の物理量については、最も近い無限要素の値を利用する。なお、本機能は、無限要素を利用しない解析にも利用することが可能である。

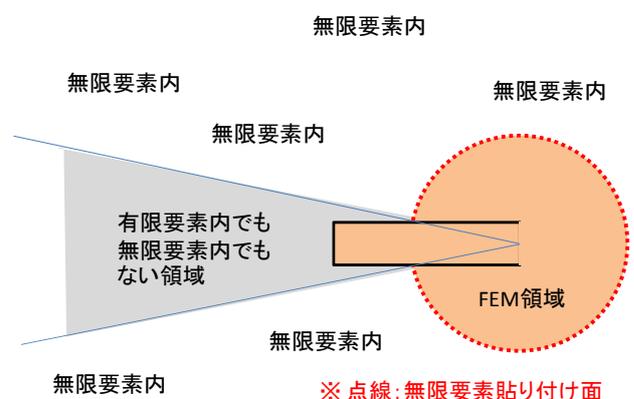


図5 領域の分類

(4) オプションと処理時間について

処理時間は解析データの要素数と観測点の積に比例する。要素数×観測点数が20億であれば、

30 秒程度のコマンドである。観測点が多くなった場合には非常に処理が遅い場合があり、高速処理モードを指定することが可能である。高速処理モードとは、無限境界で指定した球の半径および球の中心で定義される領域の外側には有限要素の解析領域はないという前提処理を高速化したものである。要素数×観測点数が 500 億であれば通常 20 分程度の処理が、高速処理モードで 2 分となる。

(5) 観測面モードでの利用

観測面データは、Advance/FrontNoise の格子ファイルと同じ AVS-UCD 形式で指定する。三角形メッシュでも四角形メッシュでも可能である。その他に、解析メッシュファイルおよび解析結果ファイル・無限要素情報ファイルを本処理の入力とする。処理結果は、入力と同じ AVS-UCD 形式で出力される。

(6) 観測点モードでの利用

観測点データは、1 行にひとつの 3 次元座標をテキストファイルに指定する。その他に、解析メッシュファイルおよび解析結果ファイル・無限要素情報ファイルを本処理の入力とする。処理結果は、入力と同じテキスト形式で出力される。

4. テスト 1 ; 点音源からの放射音

4.1. 目的

無限要素の基本的なテストとして、広い空間に 1 点のみの点音源があるケースについて、理論解と無限要素を利用した解析結果を比較する。解くべき方程式は、音響の基礎方程式

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi(x)) + k^2 \phi(x) = 0 \quad (56)$$

に対して、点音源を与えた場合には、

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi(x)) + k^2 \phi(x) = q_0 \delta(x_0) \quad (57)$$

となる。ここで、 q_0 は体積速度であり、単位は m^3/sec であり、 $\delta(\cdot)$ はデルタ関数である。この方程式には理論解が存在し、

$$\phi(r) = \frac{q_0}{4\pi r} e^{-ikr} \quad (58)$$

となる。ここで、 $k = \omega/c$ 、 $\omega = 2\pi f$ である。従って、音圧は、

$$p(r) = i\omega\rho \frac{q_0}{4\pi r} e^{-ikr} \quad (59)$$

である。

4.2. 解析形状

無限要素を設定する面は球の表面のすべてとする。ここで点音源の位置は

- ・ 球の中心位置
- ・ 球の中心から偏心した位置

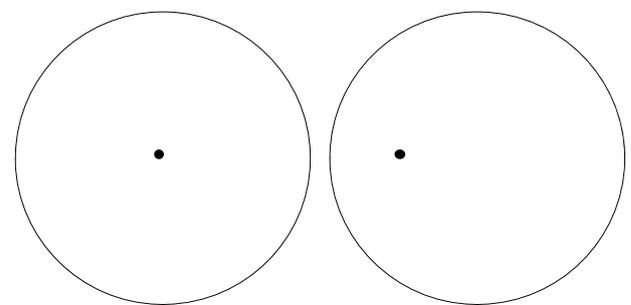
の 2 つとする。具体的なテスト形状は、下記の 2 つのケースである。ここで、球の半径は 0.3m とし、周波数は 1kHz とした。後者のケースは、球の中心から 0.16m 離れた位置を音源とした。いずれの結果についても、精度が十分な場合には解析解と一致するはずである。一致する理由は、

$$\frac{1}{r-a} = \frac{1}{1-\frac{a}{r}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} + \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{a}{r}\right)^3 + \dots \right) \quad (60)$$

すなわち

$$\frac{1}{r-a} = \sum_{n=1, \infty} \frac{a_n}{r^n} \quad (61)$$

と表現でき、Atkinson-Wilcox expansion の表現と一致すること、および、Gauss-Legendre の数値積分は低次でも理論値と同じ結果が得られることに基づいている。



【中心位置に音源】
音源は空間の1点、境界は透過境界
解析領域中心に点音源

【偏心位置に音源】
音源は空間の1点、境界は透過境界
解析領域の偏心した位置に音源

図 6 解析形状

4.3. 解析条件

解析周波数はどの周波数を選択しても本質的に同じであるため、1kHzの1つの周波数のみとし、その周波数用にメッシュ幅は0.02mと設定した。このメッシュ幅で、11万要素、2万節点程度のメッシュ数となる。また、無限要素の設定条件は特に記述しない限りデフォルトの値、すなわち、無限要素の節点数は5とし、節点位置は最初の1点を1.0として0.5刻みで設定した。その他の条件設定は下記の通りである。

表 2 形状およびメッシュの条件設定

項目	内容
形状	半径 0.3m の球
座標	球中心を原点(0,0,0)とする
音源	体積速度 1.0[m ³ /sec]の点音源
音源位置	球中心(0, 0, 0)、または、(0.16, 0, 0)
音速	344 [m/sec]
密度	1.19 [kg/m ³]
周波数	1kHz の 1 周波数のみ
境界	周囲の球表面を ρc 境界とする、または、無限要素を貼り付ける。
メッシュ幅	0.02 [m]
要素数	114,666 要素
節点数	20,796 節点
境界面の数	6,800 面

4.4. 解析結果

(1) 中心位置に音源

最も基本的な中心位置に音源のあるケースで解析結果と解析解の比較を示す。解析領域内および無限要素の節点位置での音圧レベルを比較した。

また、無限要素内を無限要素の形状関数で補間して、無限要素内の連続的な点において音圧レベルを求め、解析解と一致することを確認した。

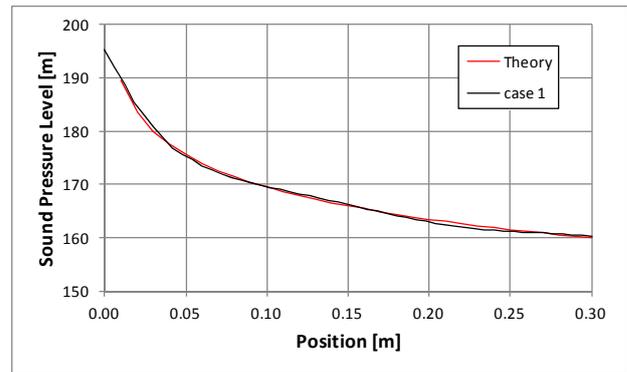


図 7 有限要素領域内の解析結果と理論値比較

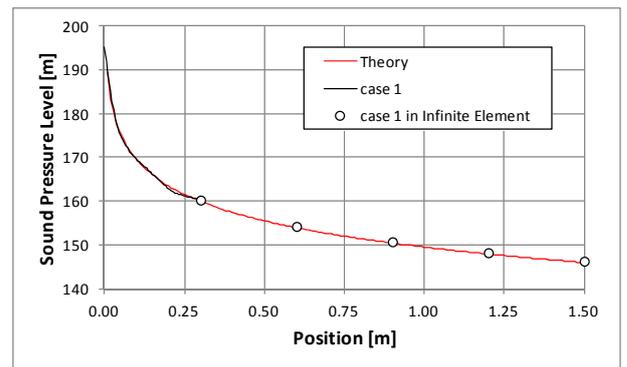


図 8 無限要素内節点位置結果と理論値の比較

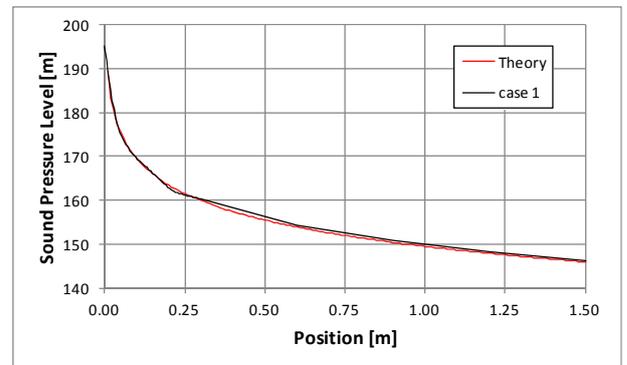


図 9 解析結果と理論値の比較

無限要素内の5つの節点位置をデフォルト値から変更した場合の結果を比較する。いずれの場合にも理論値とよく一致していることが分かる。

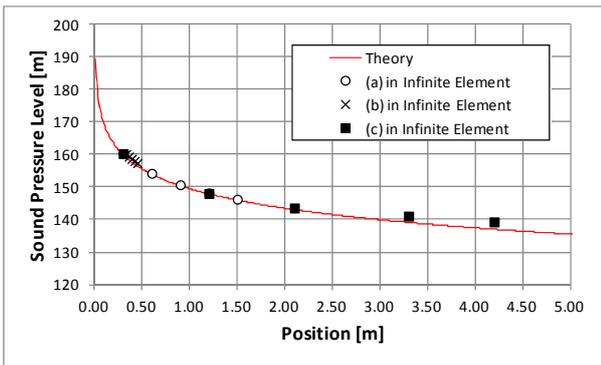


図 10 無限要素内の節点位置と解析解の比較

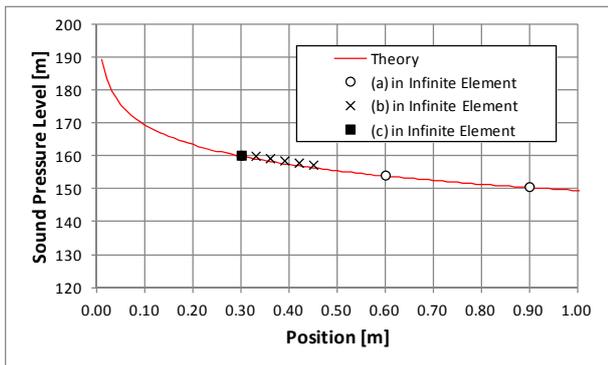


図 11 無限要素内の節点位置と解析解の比較 (横軸の拡大図)

(2) 偏心した位置に音源

音源が解析領域の偏心した位置にあるケースを解析解と比較する。参考までに、境界上に無限要素を配置するのではなく、 ρc 境界とした場合の結果も示した。本解析の理論解は、コンター図が音源を中心にした同心円になる状態である。下記にそのコンター図を示す。

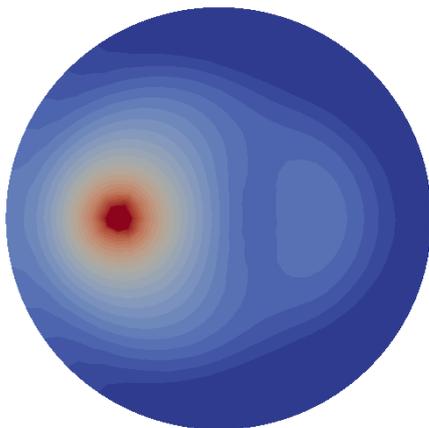


図 12 ρc 境界を適用した解析結果

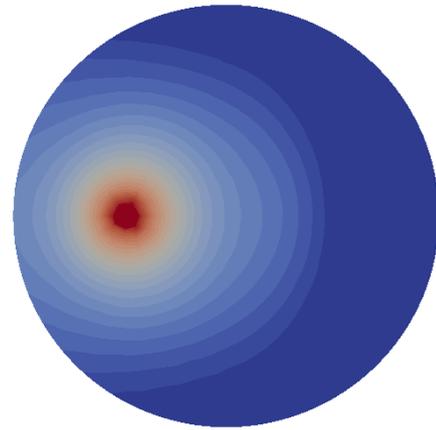


図 13 無限要素を適用した解析結果

偏心した位置の音源でも無限要素を利用した場合には音圧レベルが同心円状になっており、 ρc 境界を利用した解析結果よりも妥当な結果となっている。また、音源位置を通る直線状の音圧レベルを比較した図を下記に示す。この結果からも無限要素を利用したケースは妥当な結果が得られていることが分かる。

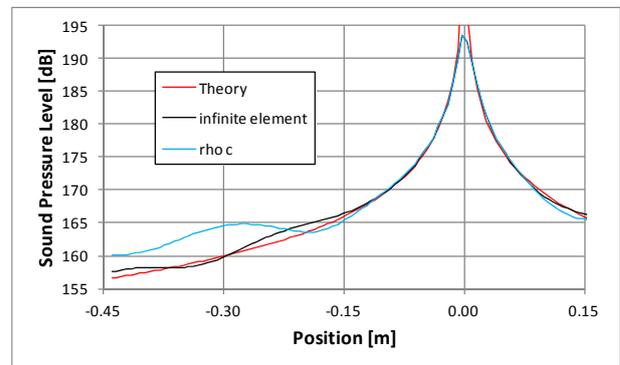


図 14 偏心した音源に対する解析解との比較

次に、観測面上での音圧（実部と虚部）を ρc 境界、無限要素、および、理論解と比較した。ここで、有限要素解析では、 $X=-0.3\sim 0.3$ のみに結果があることに注意しておく。無限要素を利用した場合には、無限遠まで結果を得ることができる。まず、解析領域と観測面の位置関係を示す。

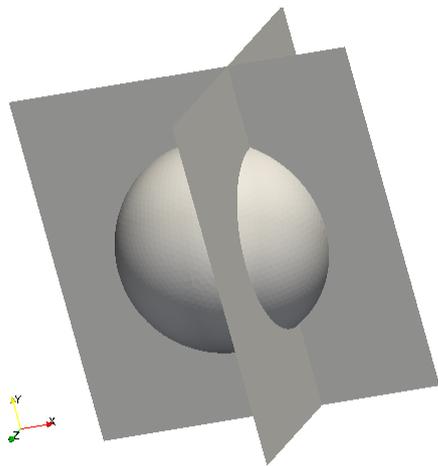


図 15 観測面と解析領域の位置関係

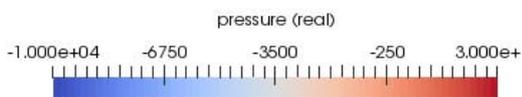
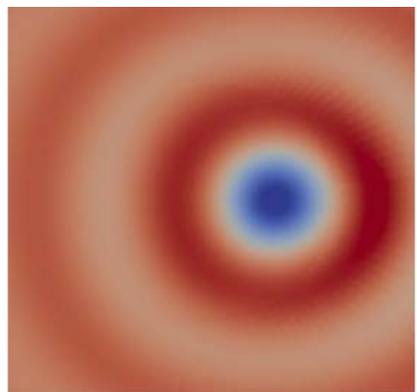
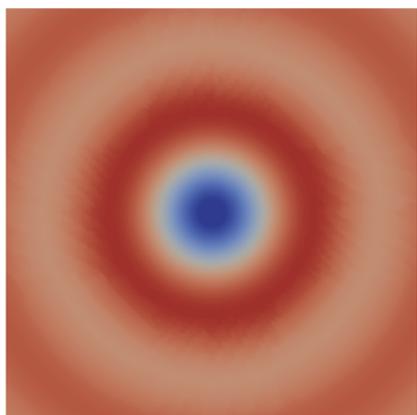


図 16 無限要素を用いた解析領域の断面コンタ (上)と観測面コンター (下) (X=0.15)

観測面でも音圧レベルが同心円状になっており、妥当な結果となっている。また、音源位置を通る直線状の音圧レベルを比較した図を下記に示す。この結果からも無限要素を利用したケースは妥当な結果が得られていることが分かる。

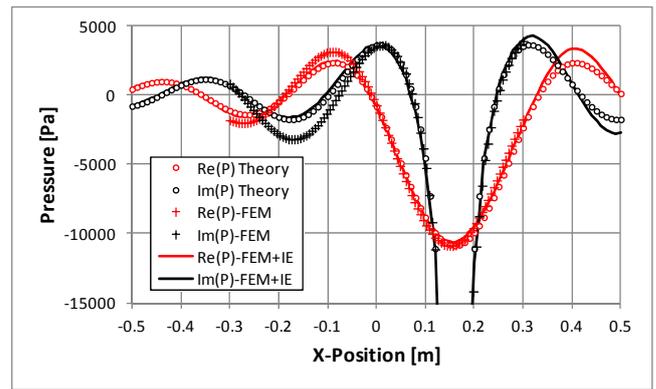


図 17 X軸上の有限要素解析と無限要素を用いた解析の音圧比較

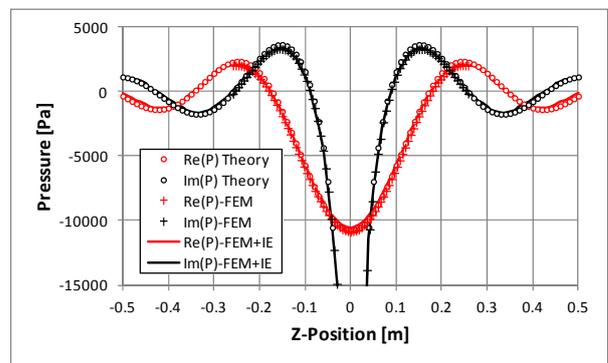


図 18 Z軸方向の有限要素解析と無限要素を用いた解析の音圧比較

4.5. 考察

本節に示した点音源からの放射音のテストにより、無限要素の基本的な性能を確認できた。偏心した位置に設定した音源からの放射では、従来の ρc 境界の解を大幅に改善することができた。また、解析終了後に任意の観測点位置での物理量を求めることができることを確認できた。無限要素における節点位置のパラメータのデフォルト値についても確認できた。

5. テスト2 : ダクト出口における反射率

5.1. 目的

波長よりも十分に小さい半径を持つ円筒ダクトから無限に広い空間への音の放射について取り扱う。ここでは、ダクト出口における反射率を解析結果と理論解とで比較する。テストに利用するダクト出口付近の形状については、「バップルあり」の条件[3]でも、「バップルなし」の条件[1][2]

でも反射率の解析解は存在するため、その両者について比較した。

有限要素のみの音響解析では、ダクト出口から外側遠方に十分に大きな領域を設定し、その外部に ρc 境界を設定することで解析を実施していた。 ρc 境界は垂直に入射する音に対してのみ透過するため、これまでは、出口から遠方まで十分に大きく領域を設定することで ρc 境界の性能を出していた。本テストでは、無限要素を利用することで、ダクト出口から外側の領域を小さくすることができることを確認することも目的である。

この問題に対しては出口での反射率が解析的に求められていることから、その解析解と比較することで解析の精度を行うことができる。同程度の精度を持てば、解析規模が小さくなることから処理時間の大幅な短縮が可能となる。ここでは、ダクトからの放射音に対して、①出口付近に ρc 境界を設定した場合/無限境界を設定したケース、②出口外側の領域のサイズを変更したケースの解析結果と理論解を比較する。

5.2. 解析形状

ダクトの直径は 0.05m、長さは 1.00m とする。ダクトの左端に単位面音源を置き、ダクト右端が出口とする。出口付近には「球形の解析領域」を設け、無限に広い空間を模擬する。ここでは、ダクト右端での反射率を求め、その理論解と比較することが主な目的である。なお、ダクトの長さは解析結果に影響を与えない。

本テストでは次に示す 3 つの解析形状・条件を設定したケースを取り扱う。出口付近に設定する球の大きさは、ケース A では半径 0.50m、ケース B と C では半径 0.10m とする。いずれも、周波数毎の反射率を得るために、100Hz から 2000Hz まで 100Hz 毎に解析を行った。

表 3 解析条件一覧

ケース名	ダクト長さ	ダクト径	出口外側半径	条件
A	1.00m	0.05m	0.50m	ρc 境界
B	1.00m	0.05m	0.10m	ρc 境界
C	1.00m	0.05m	0.10m	無限境界

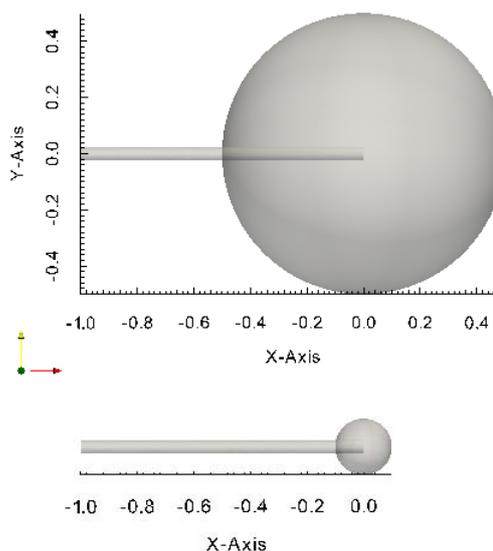


図 19 解析領域 (上; ケース A、下; ケース B,C)

また、これらの解析領域に対して、観測面を下図のように設定した。無限要素に対しては、解析領域外の物理量も求めることができる。観測面を定義し、解析結果ファイルからその観測面の物理量を求めることができる。

以下、本資料では、Z 観測面・X 観測面と呼ぶことがある。いずれも軸を中心とした 1 辺が 1.00m の正方形とした。

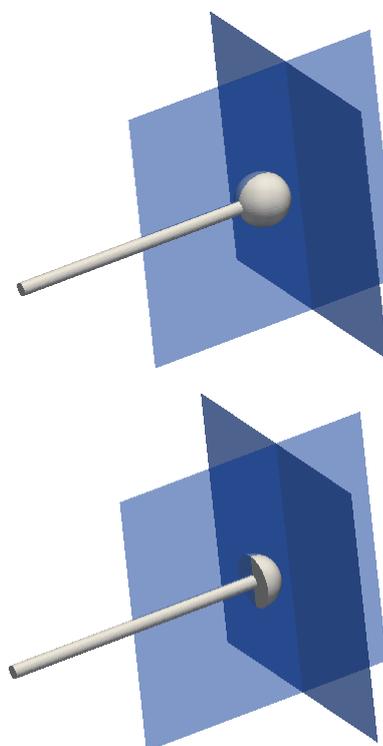


図 20 無限境界設定時の観測面の設定 (上; バッフルなし、下; バッフルあり)

5.3. 解析条件

(1) 無限要素の設定

ここでは、ダクト出口付近に設定した球面全体に対して無限要素を貼り付ける。無限要素に対する解析条件については、無限要素における側面の1辺に対する節点数は5点であり、無限要素の積分次数は5とした。無限要素を利用した場合にはメッシュ数が大幅に削減されるため、処理速度が大幅に改善される。従って、従来の解析と無限要素を利用した解析とで同程度の精度を得られることを確認するためのテストを実施した。

(2) メッシュ幅およびメッシュ数

本節で実施するテストの書くケースにおけるメッシュに関する条件の一覧を示す。観測面は、Z=0の面、および、X=0.15の面とした。

表 4 メッシュ幅

項目	内容
ダクト内	0.005 [m]
外部領域 (球内)	0.010 [m]

表 5 各ケースのメッシュ数

ケース名	バツフル	要素数	節点数
A	なし	3,646,372	627,602
B	なし	196,198	37,142
C	なし	196,198	37,142
A	あり	2,178,968	379,370
B	あり	178,694	34,011
C	あり	178,694	34,011

表 6 無限要素に関連するメッシュ数

ケース名	バツフル	境界面数	境界節点数	無限要素節点数
C	なし	3,112	1,565	6,260
C	あり	1,768	917	3,668

5.4. 解析結果

(1) バツフルなしの場合

まず、バツフルなしの場合の解析結果を示す。

いずれのグラフも理論解[1][2]および、いくつかの計算ケースを比較して示す。いずれも、これらについてはコンター図とグラフで比較を示す。なお、本ケースでは解析結果で得られた音圧と粒子速度から反射率を求めた。すなわち、

$$R = \left| \frac{\rho c - \frac{P}{v}}{\rho c + \frac{P}{v}} \right| \quad (62)$$

として出口での反射率を求めた。その次に、ケースAでの有限要素内での音圧分布・音圧レベルの分布を、ケースCの無限要素内の音圧分布・音圧レベルと比較し、問題のないことも確認する。

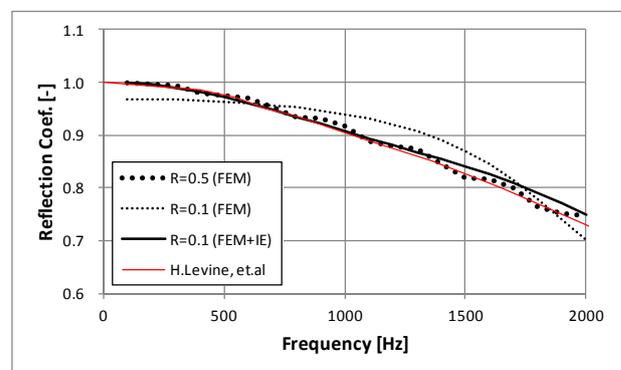


図 21 ケース A,B,C での出口反射率の比較

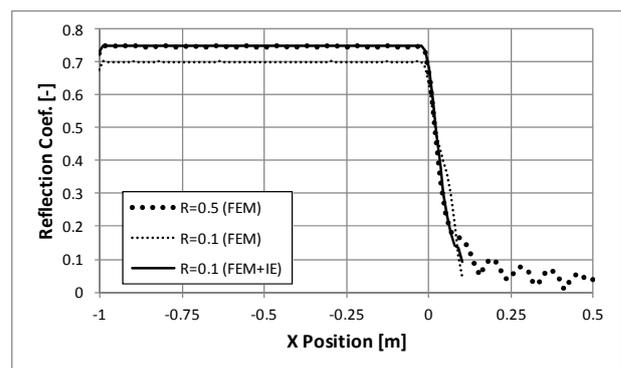


図 22 ケース A,B,C での 2000Hz における軸方向反射率の比較

まず、ケースCとケースAではダクト出口での反射率を比較し、この2つのケースでは同程度の精度を得られることが確認できた。また、ケースBでは十分な結果が得られないことが分かった。また、ケースCはケースAと比較してメッシュ数

が大幅に削減できている。従って、ケース C はケース A よりも処理速度が大幅に速くなり、このことから無限要素の有効性を確認することができる。

なお、ケース A において軸上の反射率結果が波打っているのは、球面に ρc 境界を設定したことが原因であることが判明しており、球面と同等の大きさの別形状に ρc 境界条件を設定した場合には波打つ現象がなくなりほぼ理論と同じ結果が得られることを確認している。

次に、ケース A とケース C について、音圧レベルのコンターを比較する。前者は解析領域全体の解析結果の断面でのコンターであり、後者は観測点でのコンターを比較した。

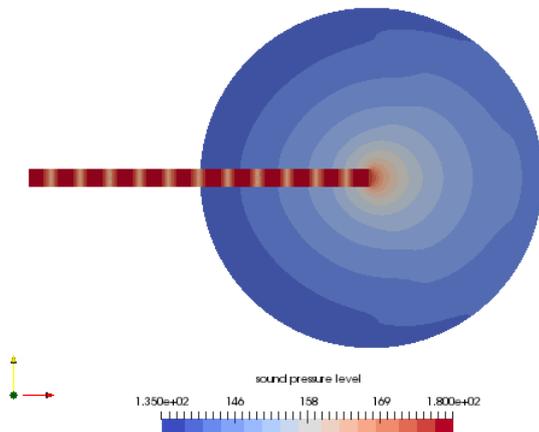


図 23 ケース A の Z 断面での音圧レベル

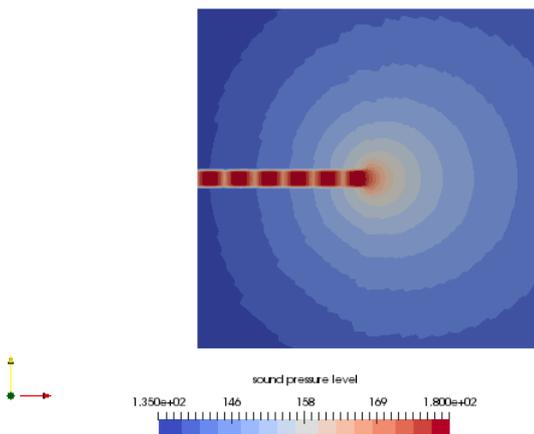


図 24 ケース C の Z 観測面での音圧レベル

いずれのケースもほぼ一致する音圧レベルを得ており、無限要素を利用したケースは妥当な結果得られていることが分かった。次にグラフでも比較しておく。

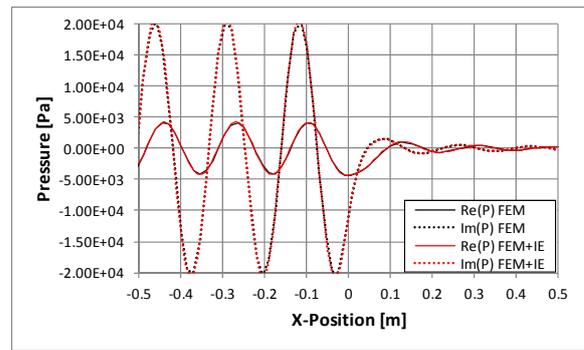


図 25 ケース A (ρc 境界) とケース C (無限境界) の Z 観測面での音圧の比較

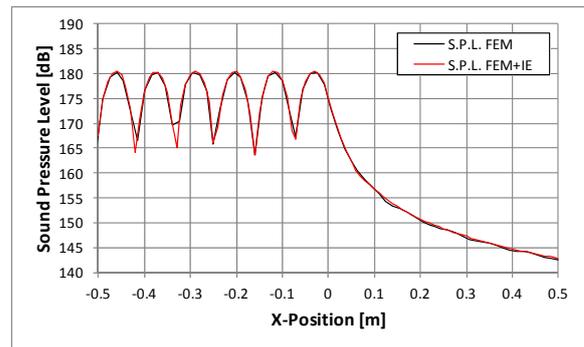


図 26 ケース A (ρc 境界) とケース C (無限境界) の Z 観測面での音圧レベルの比較

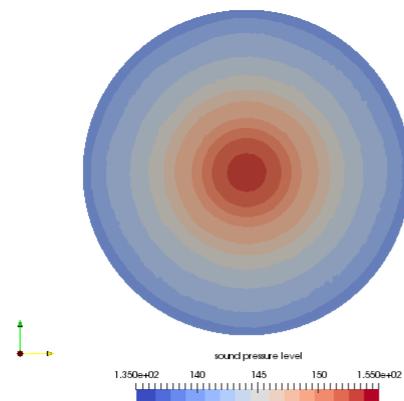


図 27 ケース A (ρc 境界) の X 断面での音圧レベル

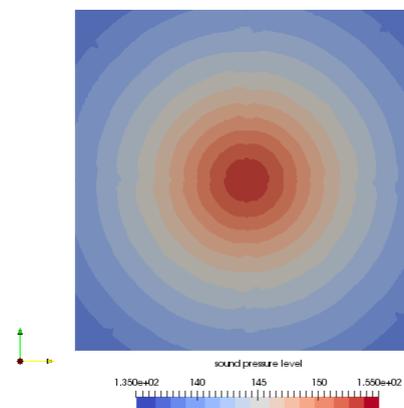


図 28 ケース C (無限境界) の X 観測面での音圧レベル

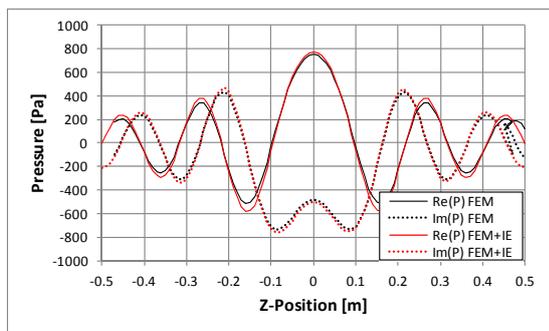


図 29 ケース A (ρc 境界)とケース C (無限境界)の X 観測面での音圧の比較

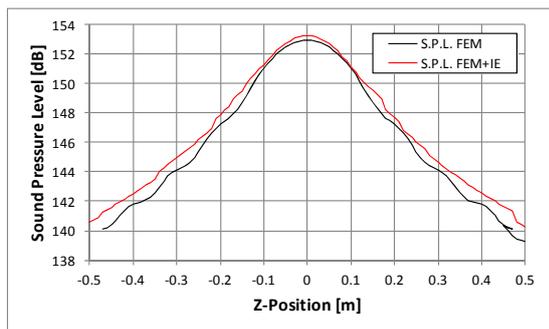


図 30 ケース A (ρc 境界)とケース C (無限境界)の X 観測面での音圧レベルの比較

(2) 解析結果その 2 ; バッフルありの場合

バッフルありのケースでも反射率に解析解が存在する。このケースでもバッフルなしの場合と同等の結果を得ることができた。

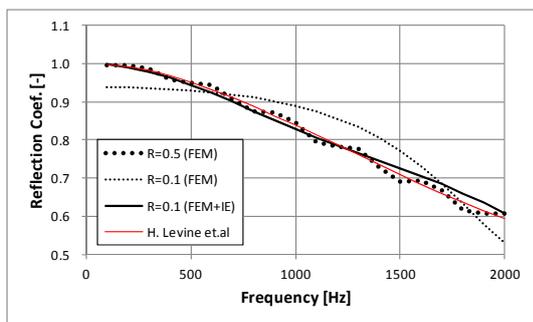


図 31 ケース A,B,C での出口反射率の比較

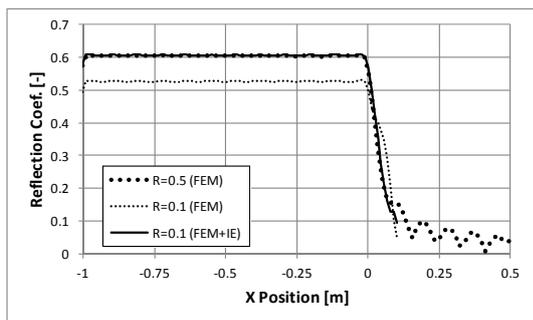


図 32 ケース A,B,C での 2000Hz における軸方向反射率の比較

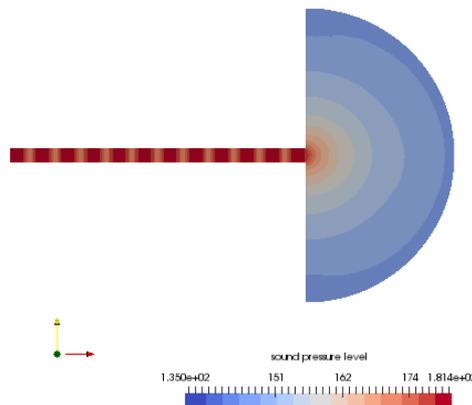


図 33 ケース A の Z 断面での音圧レベル

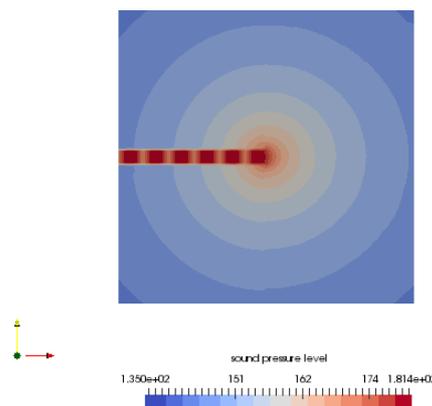


図 34 ケース C の Z 観測面での音圧レベル

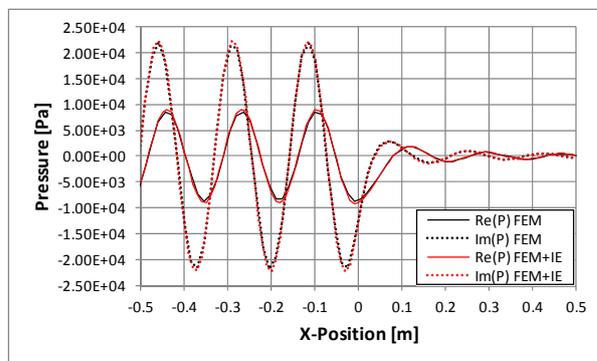


図 35 ケース A (ρc 境界)とケース C (無限境界)の Z 観測面での音圧の比較

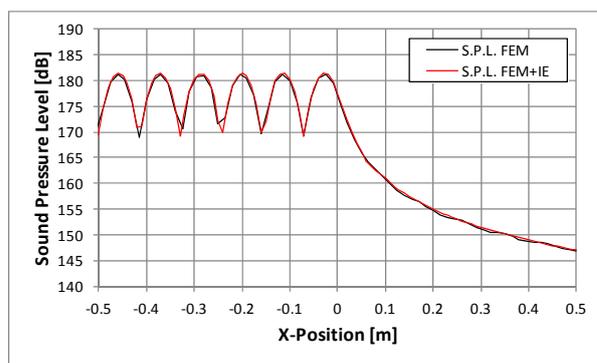


図 36 ケース A (ρc 境界)とケース C (無限境界)の Z 観測面での音圧レベルの比較

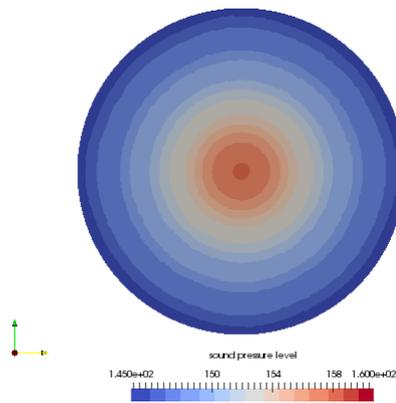


図 37 ケース A の X 断面での音圧レベル

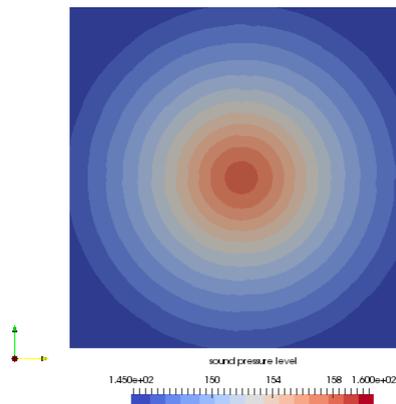


図 38 ケース C の X 観測面での音圧レベル

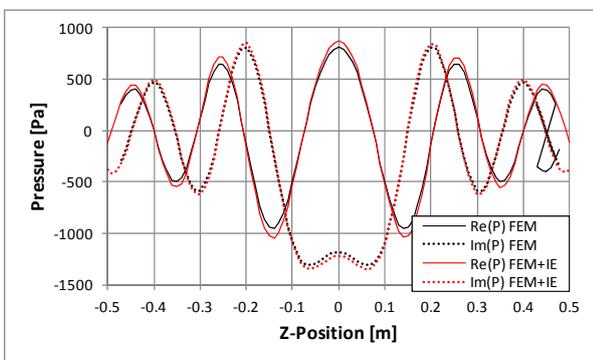


図 39 ケース A (ρc 境界) とケース C (無限境界) の X 観測面での音圧の比較

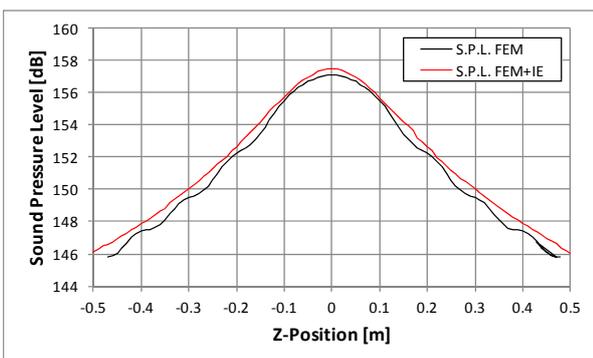


図 40 ケース A (ρc 境界) とケース C (無限境界) の X 観測面での音圧レベルの比較

5.5. 無限要素領域の感度解析

(1) 解析条件

ここまでのテストは無限領域を貼り付ける領域の中心をダクト出口に固定していた。中心の位置を変化させて結果を比較した。いずれもダクト出口はバッフル位置にある（挿入管ではない）。ここで、(a)はここまでに示したテスト条件であり、(b)は球の中心をダクト内側に半分だけずらし領域の大きさを小さくした。また(c)は球の中心をダクト内側に3/4だけずらして領域の大きさを大きく減少させたケースである。最後に(d)は領域を大きくすることで精度が変化しないか精度が向上することを狙った。



(a) $R=0.1, \theta=0.0$ (ここまでに示したテスト条件)



(b) $R=0.1, \theta=-0.05$



(c) $R=0.1, \theta=-0.075$



(d) $R=0.1, \theta=0.05$

図 41 無限領域領域の感度解析

(2) 解析結果

無限要素領域を変更した(a)~(d)すべてのケースに対して表とグラフに100~2000Hzまでの出口反射率を示す。いずれのケースも理論解との比較となる。定性的には予想された通りの結果で、領域を大きくするほど精度は上がる。ここでは、(c)のケースで無限要素領域を最も小さくしたケースの結果のみが許容できない結果となっている。

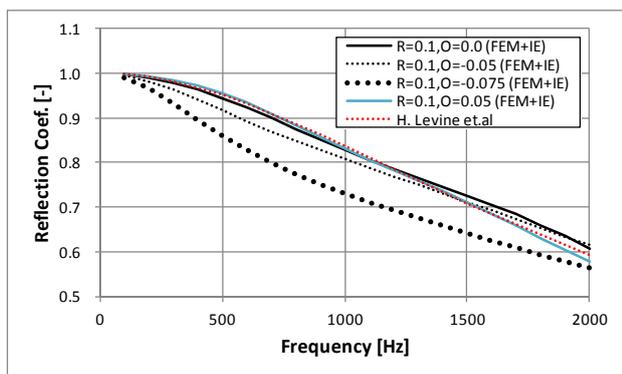


図 42 (a)から(d)のケースでの反射率の比較

前の節で示した結果では、1%程度の誤差を許容していた。これを 2%程度許容可能とすると領域を 1/2 ほど小さくできる。ただし、領域を 1/4 程度にすると結果は誤差は 10%程度となりこの解析条件は採用できない。また、領域を大きくすることで精度が向上することも確認できた。

表 7 (a)から(d)のケースでの反射率の比較 (R=0.1 無限要素で球中心を変更)

ケース名	ケース内容	反射率		
		最大誤差	誤差平均	誤差平均[%]
(a)	標準	0.023	0.010	1.38%
(b)	1/2 まで領域を狭くした	0.040	0.020	2.49%
(c)	1/4 まで領域を狭くした	0.113	0.072	9.87%
(d)	3/2 まで領域を広くした	0.015	0.004	0.57%

5.6. 考察

本節で示したダクトからの放射音の解析の問題に対して無限要素を利用して、妥当な結果を得ることができた。バツプルがないケースとバツプルがあるケースの双方で、文献で示された理論解と一致し無限要素が正しく実装されていることを確認できた。また、本ケースでは、従来の ρc 境界を利用した解析よりも解析領域を大幅に削減することが可能となり、同程度の精度で解析規模を一桁小さくする（処理時間および使用記憶容

量も一桁小さくなる）ことが可能となった。また、ダクト出口に設定する外部領域の大きさと形状について感度解析を行い、ダクトの 2 倍程度の球を設置することでダクト出口を模擬できることが分かった。

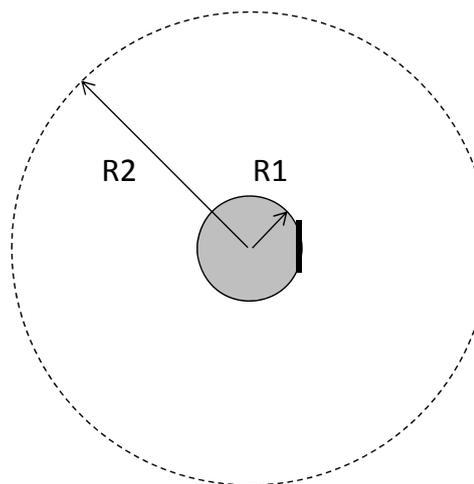
6. テスト 3 : 球面からの放射音

6.1. 目的

固体球面の一部に音源を設定して無限に広がる空間への放射の問題を利用して、無限要素をテストする。4 節で示したテスト 1 の点音源からの放射音および 5 節で示したテスト 2 のダクトからの放射音では、主に無限要素を貼り付けた境界での音の透過をテストした。すなわち、従来の ρc 境界の性能を上げることができていることを確認した。本節で示すテストでは、境界面での透過と合わせ、低周波の音の回り込みが正しく評価できることを確認することを目的とした。

6.2. 解析形状

本テストでは半径が異なり中心を共有する 2 つの球を設定する。その挟まれた領域が有限要素を設定する領域である。



- ① 半径R1の球表面の一部から音の放射
- ② 半径R2の領域を有限要素に分割 (有限要素は四面体一次要素利用)
- ③ 半径R2の外の領域を無限要素で分割 (無限要素は三角柱5次要素利用)

図 43 解析形状

まず、小さい球である半径 R1 の球面の表面一

部からの空間への放射音の解析を行う。解析対象とする領域は半径 $R1$ の球の外側すべてである。解析領域は大きい球である半径 $R2$ の球とし、その表面に無限要素を設定して、全空間の解析を可能とする。

また、本テストでは、 $R1=0.1$ [m] に固定する周波数は 2kHz を標準とし、その他に 1kHz, 4kHz, 8kHz を解析対象とした。また、観測面は音源を与えた面の一部を含む穴の開いた円板とした。

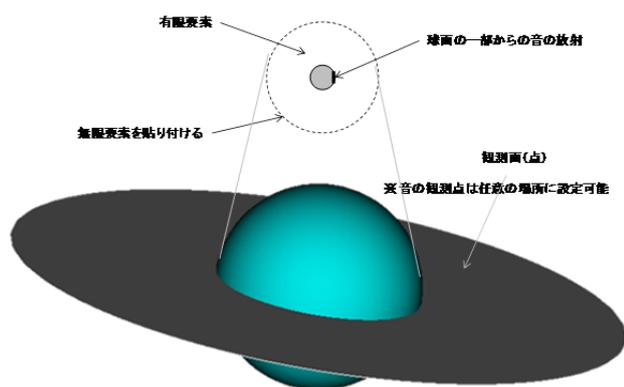


図 44 解析領域の設定と観測面

6.3. 解析条件

無限要素を利用した場合の精度および処理時間（収束までの反復回数を含む）に関するデータを取得することが本テストケースの目標である。ここでは、 $R2$ の値 ($R2=0.2, 0.3, 0.4, 0.5$)、無限要素の次数、無限要素の節点配置に関する感度解析を行う。また、無限要素を利用した大規模計算について、その処理時間、収束までの反復回数、および、使用メモリを確認する。この大規模計算については、同程度の規模の ρc 境界のケースと比較を行った。

表 8 無限要素を利用した解析ケース一覧

R1	R2	周波数			
		1kHz	2kHz	4kHz	8kHz
0.1	0.2	F2	G2	—	—
0.1	0.3	F3	G3	—	—
0.1	0.4	F4	G4	—	—
0.1	0.5	F5	G5	H5	I5

本テストにおいては、 $R=1.5$ [m] として有限要素領域を十分に大きくとり外側境界に ρc 境界を利用して得られた解を正しい解と考えた。この解を正しい解と考えた理由は、理論的に ρc 境界は境界に垂直に入射する音が透過となり、メッシュが十分に細かいという前提条件のもと $R2$ を十分に大きくとれば、正しい解を得ることができることである。本テストでは、その解と無限要素を利用した解を比較した。ここで、2kHz に対する $R=1.5$ [m] の計算は、4000 万要素の計算となり比較的大規模な計算となる（12 コアの計算機での並列計算処理時間は 3 時間程度となる）。ここで、 ρc 境界を用いた $R=0.2$ および $R=0.5$ のケースは、無限要素を利用したケースの参照計算として実施した。

表 9 ρc 境界を利用した参照計算ケース一覧

R1	R2	周波数	
		1kHz	2kHz
0.1	0.2	F2RC	G2 RC
0.1	0.5	F5 RC	G5 RC
0.1	1.5	F15 RC	G15 RC

6.4. 無限要素の解析結果

まず、標準のケースとして、無限要素を利用した 1, 2, 4, 8kHz の結果を示す。ここでは、無限領域の次数を 5 とし、無限領域の節点配置を 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0 の条件とした。また、観測面は中心を解析領域と共有する半径 1.5m に半径 0.1 の穴の開いた円板とした。穴の開いた観測面には、有限要素の解析領域および無限要素の領域を含むような設定とした。

ここで得られた 1, 2, 4, 8kHz の結果については、定性的に妥当な結果を得ることができた。また、解析後に計算を行う観測点での物理量を得る処理においても妥当な結果を得ることができた。これらの結果を本節の以下の内容で定量的な評価を行った内容を示す。

また、ここでは最大規模で 2 億要素の解析を実施した。2 億要素の解析においても十分に実用的

な時間で収束し、無限要素が収束状況および並列性能に悪影響を及ぼさないことを確認できた。本節の以下の内容では、結果図の中に黒枠を示している。この黒枠内が有限要素による解析領域であることを示している。無限要素を利用した解析では、その外側は無限要素が存在する領域であることを示している。

表 10 解析条件と解析結果一覧 (1,2kHz)

ケース名	F5	G5
周波数	1 kHz	2 kHz
内部境界半径	0.1	0.1
外部境界半径	0.5	0.5
外部境界	無限要素	無限要素
有限要素数	370, 123	2, 960, 984
節点数	66, 247	512, 548
無限要素次数	5	5
無限要素節点位置	0.5 刻み	0.5 刻み
無限要素数	19, 204	76, 816
無限要素節点数	38, 416	153, 640
並列数	6	12
使用メモリ	2.4GB	8.4GB
処理時間 [sec]	19.2	391.0
ソルバー反復回数	264	911

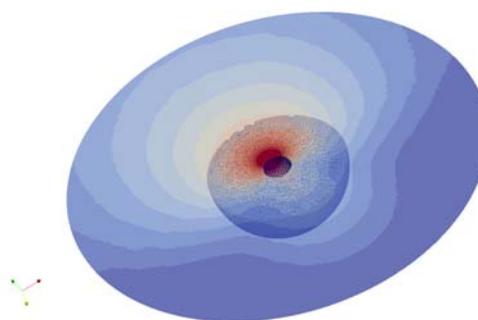


図 45 無限要素を利用した解析結果 (解析領域の断面、観測面、重ね描き、1kHz)

表 11 解析条件と解析結果一覧 (4,8kHz)

ケース名	H5	I5
周波数	4 kHz	8 kHz
内部境界半径	0.1	0.1
外部境界半径	0.5	0.5
外部境界	無限要素	無限要素
有限要素数	23, 687, 872	189, 502, 976
節点数	4, 025, 810	31, 898, 418
無限要素次数	5	5
無限要素節点位置	0.5 刻み	0.5 刻み
無限要素数	307, 264	1, 229, 056
無限要素節点数	614, 536	2, 458, 120
並列数	12	6
使用メモリ	40GB	264GB
処理時間 [sec]	12, 200	43, 200
ソルバー反復回数	3, 564	1450

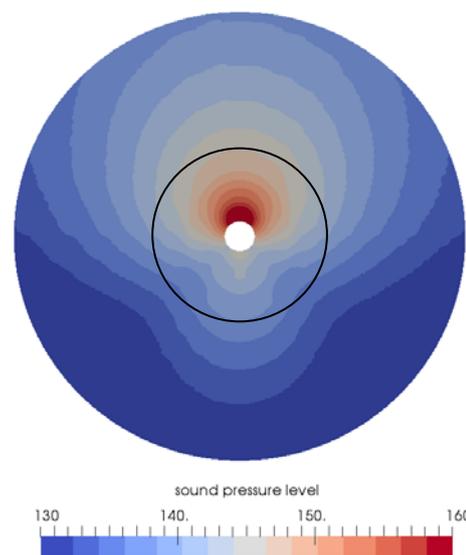
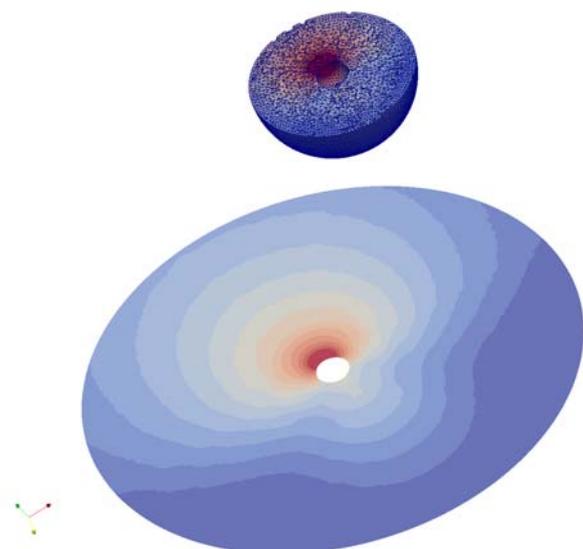


図 46 無限要素の解析結果 (1kHz, F5)

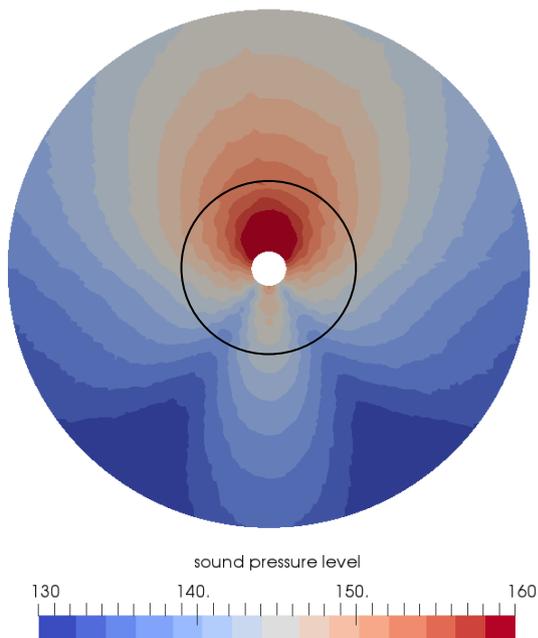


図 47 無限要素の解析結果 (2kHz, G5)

6.5. ρc 境界の結果 (参照ケース)

参照ケースとして、1kHz および 2kHz に対して、 $r=R2$ の面の外部境界に ρc 境界を利用したケースの結果を示す。ここで、無限要素と比較することを目的として実施したデータは、 $R2=1.5[m]$ のデータのみであり、その計算ケースを F15RC および G15RC とした。参考までに処理時間と収束状況を無限境界と比較するために、 $R=0.2[m]$ および $R=0.5[m]$ の計算を実施した。これが F5RC および G5RC のケースである。

表 12 ρc 境界を利用した結果 (1kHz)

ケース	F2RC	F5RC	F15RC
周波数	1 kHz	1 kHz	1 kHz
R1	0.1	0.1	0.1
R2	0.2	0.5	1.5
境界	ρc 境界	ρc 境界	ρc 境界
要素数	29, 579	370, 123	4, 794, 970
節点数	5, 819	66, 247	836, 804
並列数	6	6	6
時間	0.22	3.54	270 sec
反復数	37	119	578

表 13 ρc 境界を利用した結果 (2kHz)

ケース	G2RC	G5RC	G15RC
周波数	2 kHz	2 kHz	2 kHz
R1	0.1	0.1	0.1
R2	0.2	0.5	1.5
境界	ρc 境界	ρc 境界	ρc 境界
要素数	236, 632	2, 960, 984	38, 359, 760
節点数	43, 031	512, 548	6, 556, 851
並列数	12	12	12
時間	1.87	84.2	8480
反復数	92	288	1129

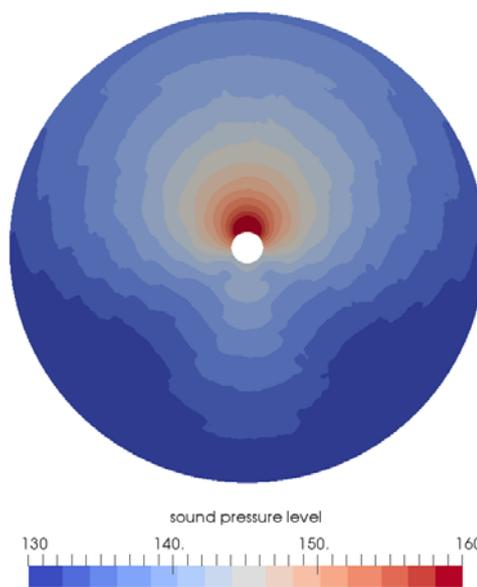


図 48 ρc 境界の解析結果 (1kHz, F15RC)

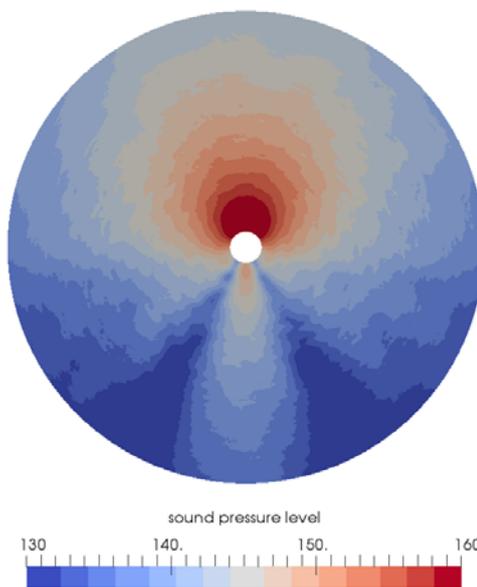


図 49 ρc 境界の解析結果 (2kHz, G15RC)

6.6. 無限要素の処理時間・メモリ・収束状況

(1) 解析結果

無限要素の処理時間・メモリ・収束状況を評価するために、同程度の規模も問題に対して解析を実施した。ここでは、無限要素と ρc 境界の計算時間および反復回数を比較するために 1kHz, 2kHz, 4kHz, 8kHz の周波数に対して、 $R2=0.5$ のケースの計測を行った。ここでは、使用メモリの計測も行った。同程度の規模となるケース F4 と F4RC の処理時間を比較した。同様に、G5 と G5RC、H5 と H5RC、I5 と I5RC についても比較した。いずれのケースも、データは前節に掲載したデータを利用した。

表 14 ρc 境界参照ケース一覧 ($R2=0.5$)

ケース名	F5RC	G5RC
周波数	1 kHz	2 kHz
内部境界半径	0.1	0.1
外部境界半径	0.5	0.5
外部境界	ρc 境界	ρc 境界
有限要素数	370,123	2,960,984
節点数	66,247	512,548
並列数	6	12
使用メモリ	0.6GB	4.8GB
処理時間 [sec]	3.54 sec	84.2 sec
ソルバー反復回数	119	288

表 15 ρc 境界参照ケース一覧 ($R2=0.5$)

ケース名	H5RC	I5RC
周波数	4 kHz	8 kHz
内部境界半径	0.1	0.1
外部境界半径	0.5	0.5
外部境界	ρc 境界	ρc 境界
有限要素数	23,687,872	189,502,976
節点数	4,025,810	31,898,418
並列数	12	6
使用メモリ	36GB	240GB
処理時間 [sec]	1640 sec	33,400 sec
ソルバー反復回数	558	1,185

これらの結果では、同じ大きさに対して無限要素と ρc 境界の解析を実施しているため、無限要素を利用した方がいい精度が得られる。しかし、ここでのテストの目的は同程度の解析規模で無限要素を利用した場合の処理時間とメモリの目安を示すことである。

また、参考までに、ここで実施した4つのケースに対して有限要素に対する無限要素の割合を示した。表中の①~④は、①：ケース、②：有限要素節点数、③：無限要素節点数、④：無限要素割合である。

表 16 無限要素節点の割合

①	F5	G5	H5	I5
②	66,247	512,548	4,025,810	31,898,418
③	38,416	153,640	614,536	2,458,120
④	58.0%	30.0%	15.3%	7.7%

(2) 処理時間とメモリ

小規模なデータの方が、従来の解析と無限要素を利用した解析のメモリ量および処理時間の乖離が大きい。これは、本データでは、大規模データになるほど境界に貼り付ける無限要素の節点数の割合が減少することが原因である。例えば、5次の無限要素では、ひとつの要素に15点の節点を割り当てる。小規模なデータほど、この15点の効き方が大きいという理由である。一般的には、ここに示したデータにおける有限要素と無限要素に対する節点数の割合を参考にして、無限要素を利用した場合の処理時間とメモリ量を予測することができる。

無限要素を利用した解析では、同程度の規模の無限要素を利用しない解析と比較してソルバーの反復回数が増大する傾向がある。これは、無限要素の設定で自由度が増加することと合わせ、内部で解いている行列においては、無限要素内の節点の対しては1行当たりの非零要素の数が増加するためである。無限要素と有限要素の1行当たりの非零要素の割合は、5次の無限要素の場合には15:4である。高次の無限要素を利用するとその次

数に比例して非零要素の数が増大する。また、メモリについても同様の理由で増加する。

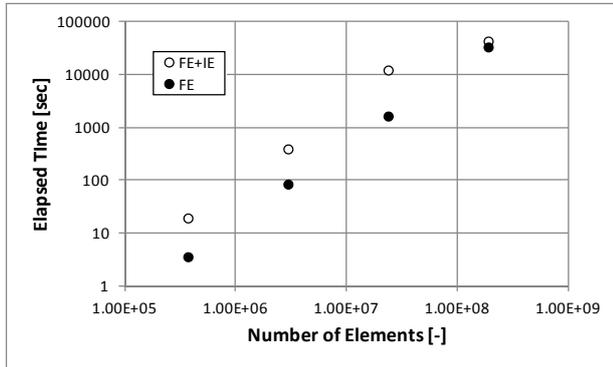


図 50 無限要素を利用したケースと ρc 境界を利用したケースの処理時間比較

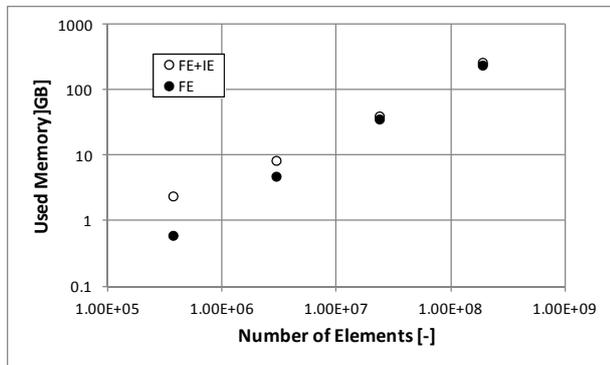


図 51 無限要素を利用したケースと ρc 境界を利用したケースの使用メモリ比較

(3) 収束状況

本項目でも、処理速度とメモリの評価と同様に、同じ解析規模で、無限境界と ρc 境界の収束状況を比較することである。従って、精度を度外視しているため、収束回数が少ないので ρc 境界の方が無限要素よりも妥当であるという結果にはならないことに注意しておく。周波数 1kHz, 2kHz, 4kHz, 8kHz の解析における収束状況を示す。いずれのケースも無限要素を利用した場合には無限要素を利用した大規模計算として、1億9000万要素、3200万節点のケースを実施した。必要なメモリは264GB、12並列で12時間程度の処理時間を要した。また、同程度の無限要素を利用しない大規模計算は必要なメモリは240GBで9時間程度の処理時間となった。この結果から、無限要素を利

用した大規模計算は、従来の解析と比較してメモリは1.1倍程度、処理時間は1.2~1.3倍程度と推定できる。確認のため、それよりも小さいいくつかのデータ規模で計算を行い、上記の内容を裏付ける結果となった。

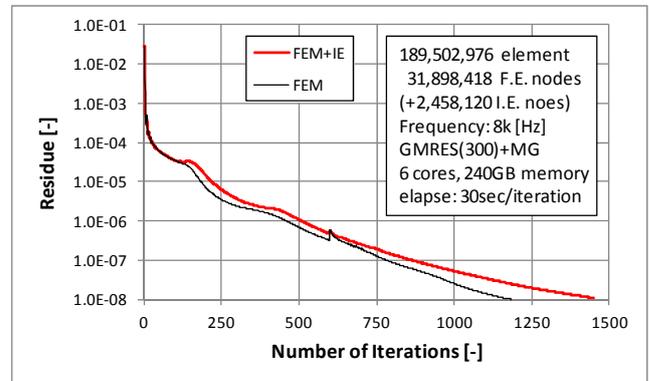


図 52 無限要素を利用したケースと ρc 境界を利用したケースの収束履歴 (8kHz)

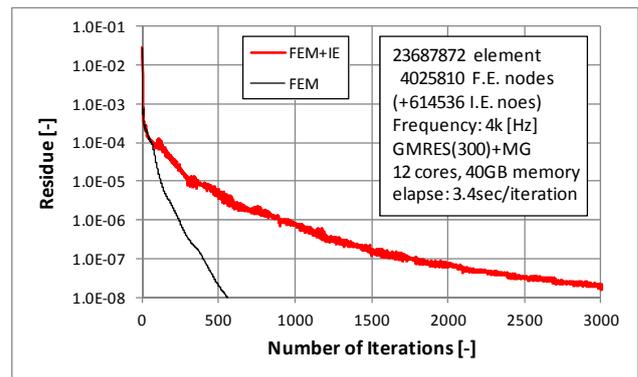


図 53 無限要素を利用したケースと ρc 境界を利用したケースの収束履歴 (4kHz)

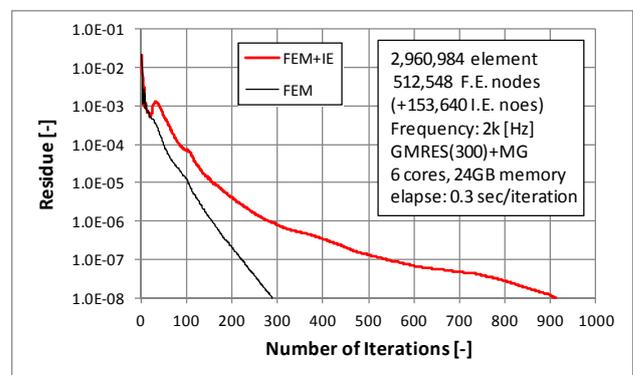


図 54 無限要素を利用したケースと ρc 境界を利用したケースの収束履歴 (2kHz)

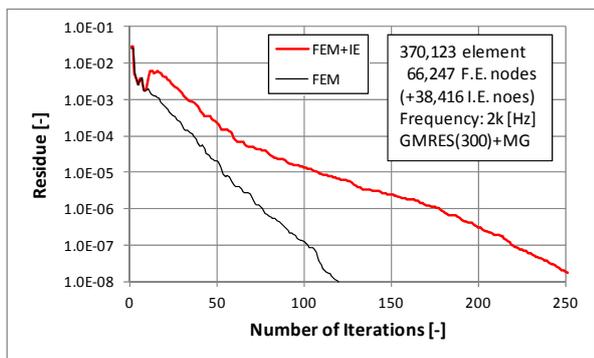


図 55 無限要素を利用したケースと ρc 境界を利用したケースの収束履歴 (1kHz)

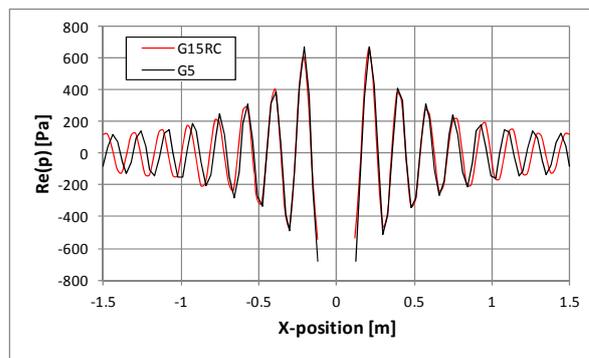


図 58 無限要素と ρc 境界の音圧実数部の比較 (X 軸上、2kHz)

6.7. 解析結果の評価

(1) 周波数 2kHz

周波数 2kHz について、 $R2=0.5[m]$ に対して無限領域を利用した解析結果と $R2=1.5[m]$ に対して ρc 境界を利用した結果の比較を示す。

ここで、 ρc 境界を利用したケースと無限要素を利用したケースでは、 $R2$ が異なることに注意する。 $R2$ が異なるということは解析領域の大きさが異なり、このケースでは、 ρc 境界の方が 8 倍の処理時間を要していることに注意する。

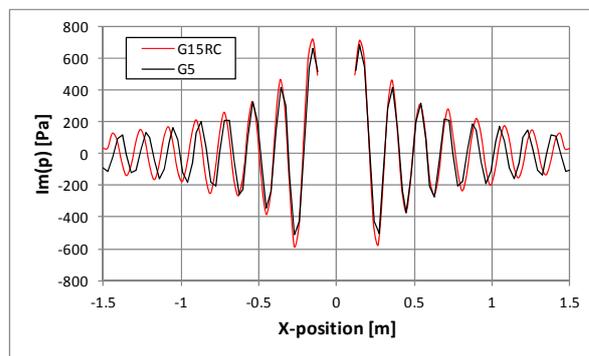


図 59 無限要素と ρc 境界の音圧虚数部の比較 (X 軸上、2kHz)

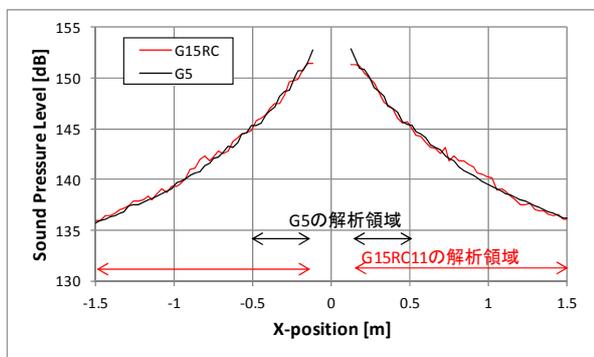


図 56 無限要素と ρc 境界の音圧レベルの比較 (X 軸上、2kHz)

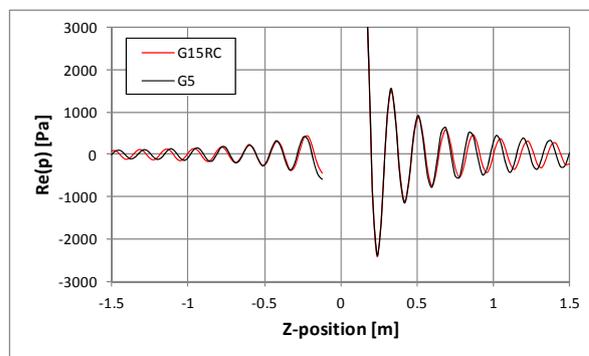


図 60 無限要素と ρc 境界の音圧実数部の比較 (Z 軸上、2kHz)

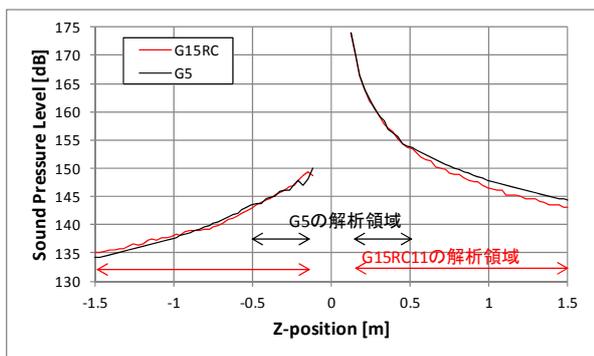


図 57 無限要素と ρc 境界の音圧レベルの比較 (Z 軸上、2kHz)

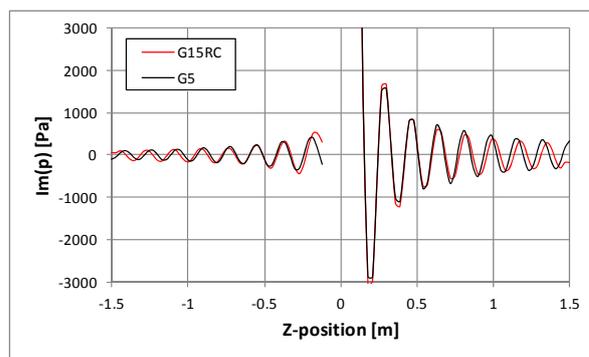


図 61 無限要素と ρc 境界の音圧虚数部の比較 (Z 軸上、2kHz)

(2) 周波数 1kHz

周波数 1kHz について、R2=0.5[m]に対して無限領域を利用した解析結果と R2=1.5[m]に対して ρc 境界を利用した結果の比較を示す。ここでも 2kHz の場合と同様に、 ρc 境界を利用している場合には無限要素を利用しているケースよりも長い処理時間がかかっていることに注意し、同程度の結果が得られることにのみ着目する。

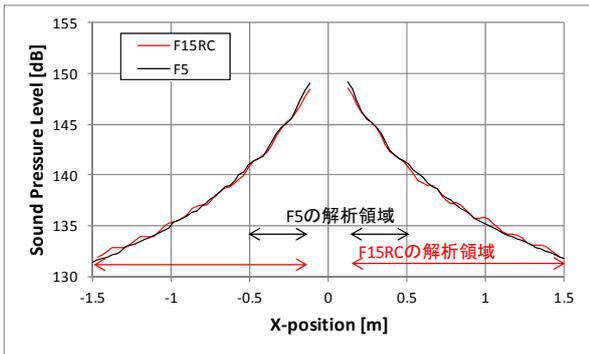


図 62 無限要素と ρc 境界の解析結果比較 (X 軸上、1kHz)

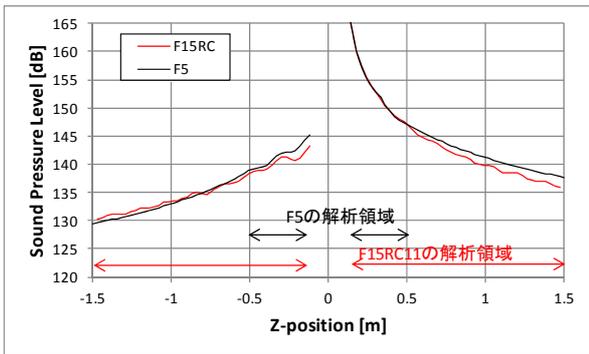


図 63 無限要素と ρc 境界の解析結果比較 (Z 軸上、1kHz)

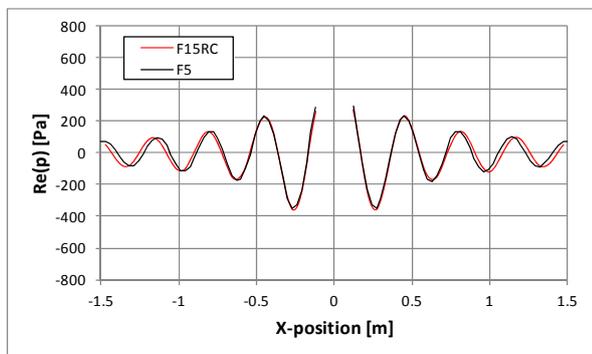


図 64 無限要素と ρc 境界の音圧実数部比較 (X 軸上、1kHz)

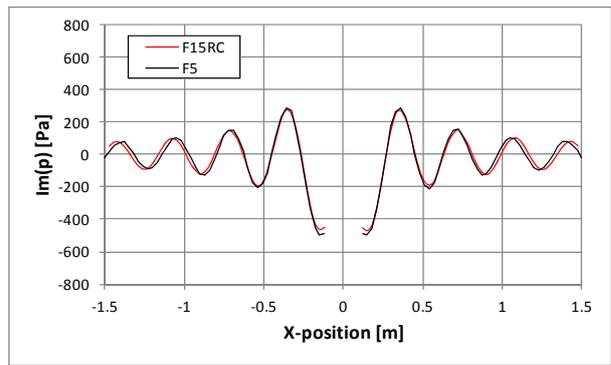


図 65 無限要素と ρc 境界の音圧虚数部比較 (X 軸上、1kHz)

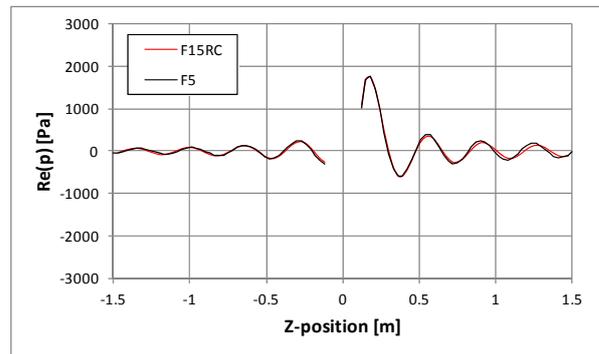


図 66 無限要素と ρc 境界の音圧実数部比較 (Z 軸上、1kHz)

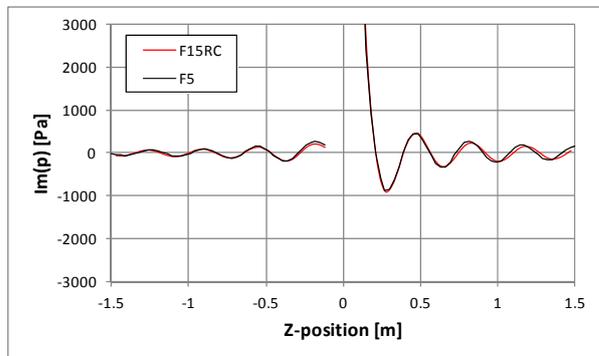


図 67 無限要素と ρc 境界の音圧虚数部比較 (Z 軸上、1kHz)

(3) 注意

周波数 2kHz および 1kHz の結果において、無限要素と ρc 境界を比較すると、音圧の実部と虚部のグラフの位相がずれているように見える。これは、解析領域内部のメッシュが粗くなっていることに起因する。参考までに、F15RC のメッシュを細分化した結果を下記のグラフ F15RCfine に示す。

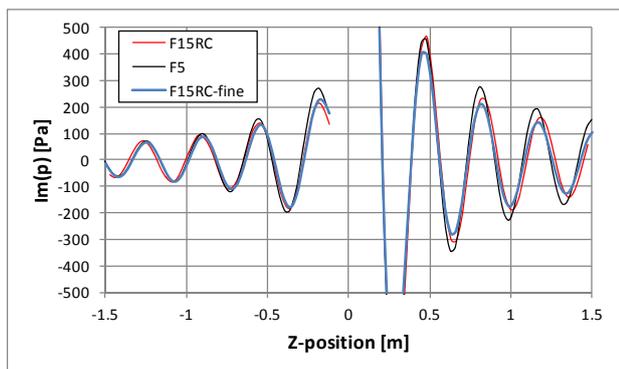


図 68 無限要素と ρc 境界の音圧実数部比較 (Z 軸上、1kHz)

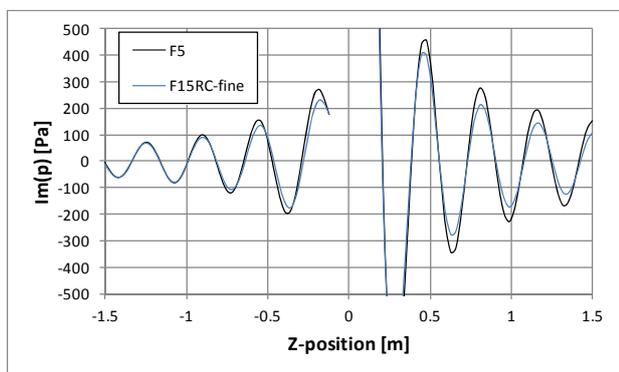


図 69 無限要素と ρc 境界の音圧実数部比較 (Z 軸上、1kHz)

(4) 考察

結果の精度比較として、「無限要素を利用した解析」と「十分に大きく解析領域を設定したうえでの ρc 境界の解析」を比較した。ここで、無限要素を利用した解析では解析領域外の観測点を設定し、 ρc 境界の解析の結果と比較した。無限要素を利用した解析では半径 0.5[m]の球を解析領域として、半径 1.5[m]の円板を観測点として設定した。 ρc 境界の解析は半径 1.5[m]の球を解析領域として設定した。 ρc 境界の解析の解析規模は無限要素を利用した解析の解析規模のほぼ 27 倍である。この結果無限要素を利用した解析の観測点と B の解析領域内の結果はほぼ一致した。このことから、無限要素を利用した解析では ρc 境界の解析と同等の精度を得ることができ、処理速度が一桁以上速くなるという結論を得ることができた。

6.8. 外部境界の距離 (R2) に関する感度解析

(1) 周波数 2kHz

ここでは R2 に関する感度解析を行う。周波数 2kHz に対して、R2 を変化させてその結果を比較した。無限要素を利用する場合には外部領域に任意の観測点 (面) を設置できるため、処理時間の面で R2 は可能な限り小さい方がいい。ただし、あまり小さい解析領域では、モデルで表現できる範囲外となる可能性がある。ここでは、

R2=0.2, 0.3, 0.4, 0.5

とした 5 ケースを解析することにより、妥当な R2 を確認した。

表 17 解析条件と解析結果一覧 (1,2kHz)

ケース名	G2	G3
周波数	2 kHz	2 kHz
内部境界半径	0.1	0.1
外部境界半径	0.2	0.3
外部境界	無限要素	無限要素
有限要素数	236632	779216
節点数	43031	137189
無限要素次数	5	5
無限要素節点位置	0.5 刻み	0.5 刻み
無限要素数	11, 880	27, 312
無限要素節点数	23, 768	54, 632
並列数	12	12
処理時間 [sec]	9.84	49.1
ソルバー反復回数	199	419

表 18 解析条件と解析結果一覧 (1,2kHz)

ケース名	G4	G5
周波数	2 kHz	2 kHz
内部境界半径	0.1	0.1
外部境界半径	0.4	0.5
外部境界	無限要素	無限要素
有限要素数	1664272	2960984
節点数	289710	512548
無限要素次数	5	5
無限要素節点位置	0.5 刻み	0.5 刻み
無限要素数	48, 776	76, 816

無限要素節点数	97,560	153,640
並列数	12	12
処理時間 [sec]	156.0	391.0
ソルバー反復回数	619	911

これらの感度解析の結果を断面コンターおよびグラフに示す。いずれも有限要素領域内のみならず、 $R=1.5\text{m}$ の観測面を設定して、その全体での結果をすべてのケースで比較した。

表 19 無限要素を利用し R2 を変化させた結果 (2kHz、黒枠が解析領域)

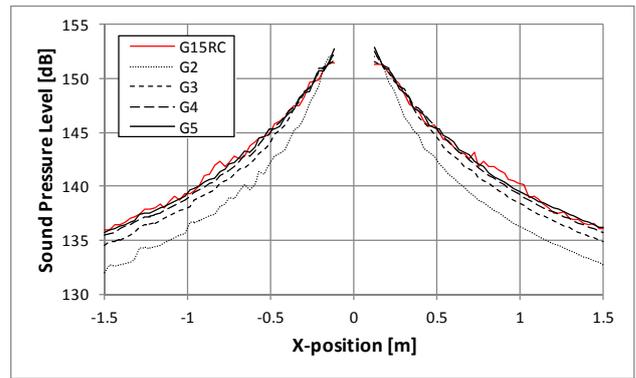
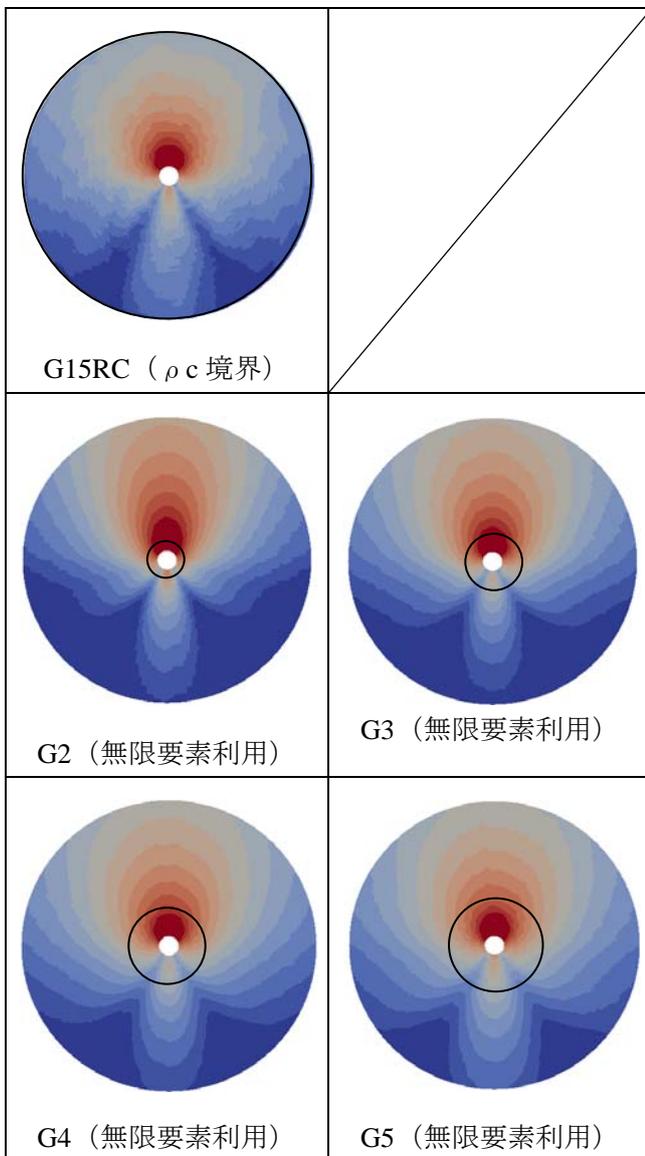


図 70 無限要素と ρc 境界の音圧レベルの比較 (X 軸上、2kHz)

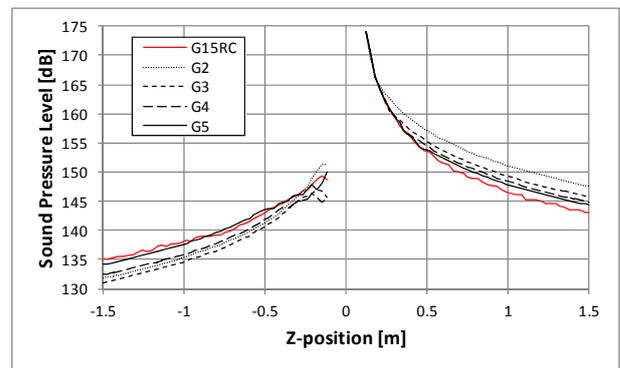


図 71 無限要素と ρc 境界の音圧レベルの比較 (Z 軸上、2kHz)

ここでテストした周波数 2kHz では、 $R2=0.5\text{[m]}$ 程度でほぼ正解が得られることが分かった。この範囲については、周波数に依存する。その傾向をとらえるために、次の節で 1kHz について同様のテストを行った。

(2) 周波数 1kHz

前節では、2kHz のケースで妥当な R2 を確認したがここでは 1kHz のケースで妥当な R2 を確認することを目的とした。

表 20 解析条件と解析結果一覧 (1,2kHz)

ケース名	F2	F3
周波数	1 kHz	1 kHz
内部境界半径	0.1	0.1
外部境界半径	0.2	0.3
外部境界	無限要素	無限要素
有限要素数	5,819	97,402

節点数	29,579	18,022
無限要素次数	5	5
無限要素節点位置	0.5 刻み	0.5 刻み
無限要素数	2,970	6,828
無限要素節点数	5,948	13,664
並列数	6	6
処理時間 [sec]	1.51	3.80
ソルバー反復回数	75	120

表 21 解析条件と解析結果一覧 (1,2kHz)

ケース名	F4	F5
周波数	1 kHz	1 kHz
内部境界半径	0.1	0.1
外部境界半径	0.4	0.5
外部境界	無限要素	無限要素
有限要素数	208,034	370,123
節点数	37,625	66,247
無限要素次数	5	5
無限要素節点位置	0.5 刻み	0.5 刻み
無限要素数	12,194	19,204
無限要素節点数	24,396	38,416
並列数	6	6
処理時間 [sec]	8.76	19.2
ソルバー反復回数	177	264

表 22 無限要素を利用し R2 を変化させた結果 (1kHz、黒枠が解析領域)

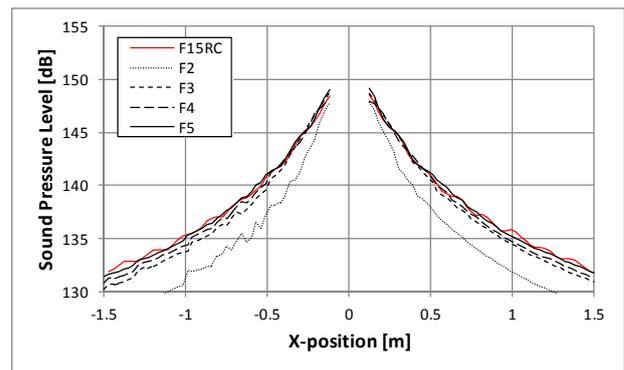
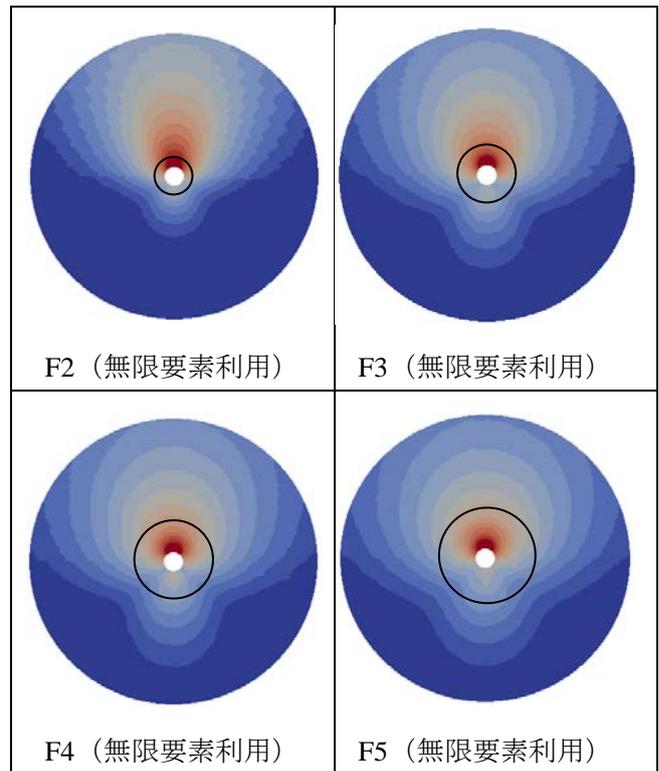
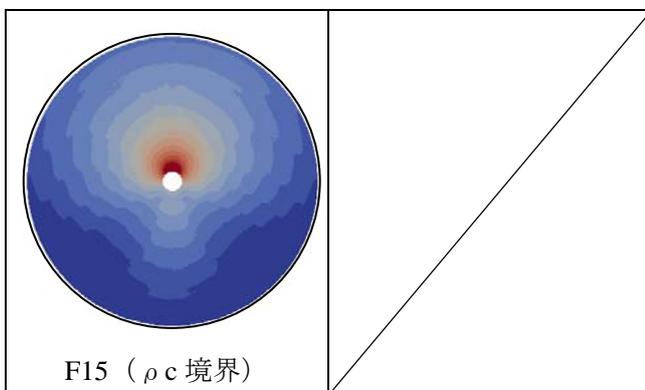


図 72 無限要素と ρc 境界の音圧レベルの比較 (X 軸上、1kHz)

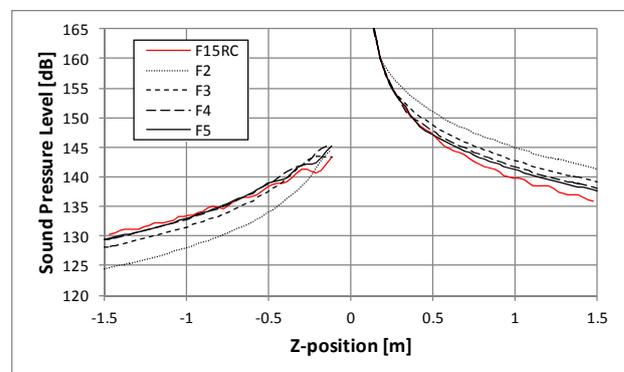


図 73 無限要素と ρc 境界の音圧レベルの比較 (Z 軸上、1kHz)

6.9. 無限要素の次数に関する感度解析

無限要素の次数に対する結果の依存性を確認した。本ケースでは、3次から6次まで、結果の相違は見られなかった。ただし、複雑な音場に対しては高次の項が有効な場合があるため、引き続きの検討が必要と考えられる。また、2次の無限要素については計算が収束しなかったがこれはモデルの限界と考えられ、この事実は、実質上問題はない。

表 23 解析条件と解析結果一覧 (1,2kHz)

ケース名	G5-3	G5-4
周波数	2 kHz	2 kHz
内部境界半径	0.1	0.1
外部境界半径	0.5	0.5
外部境界	無限要素	無限要素
有限要素数	2,960,984	2,960,984
節点数	512,548	512,548
無限要素次数	3	4
無限要素節点位置	0.5 刻み	0.5 刻み
無限要素数	76,816	76,816
無限要素節点数	76,820	115,230
並列数	12	12
処理時間 [sec]	211.0	278.0
ソルバー反復回数	600	755

表 24 解析条件と解析結果一覧 (1,2kHz)

ケース名	G5-5	G5-6
周波数	2 kHz	2 kHz
内部境界半径	0.1	0.1
外部境界半径	0.5	0.5
外部境界	無限要素	無限要素
有限要素数	2,960,984	2,960,984
節点数	512,548	512,548
無限要素次数	5	6
無限要素節点位置	0.5 刻み	0.5 刻み
無限要素数	76,816	76,816
無限要素節点数	153,640	192,050
並列数	12	12
処理時間 [sec]	391.0	577.0
ソルバー反復回数	911	1197

表 25 無限要素を利用し次数を変化させた結果 (2kHz、黒枠が解析領域)

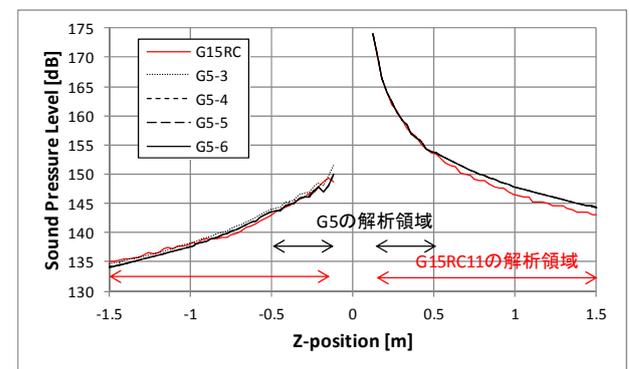
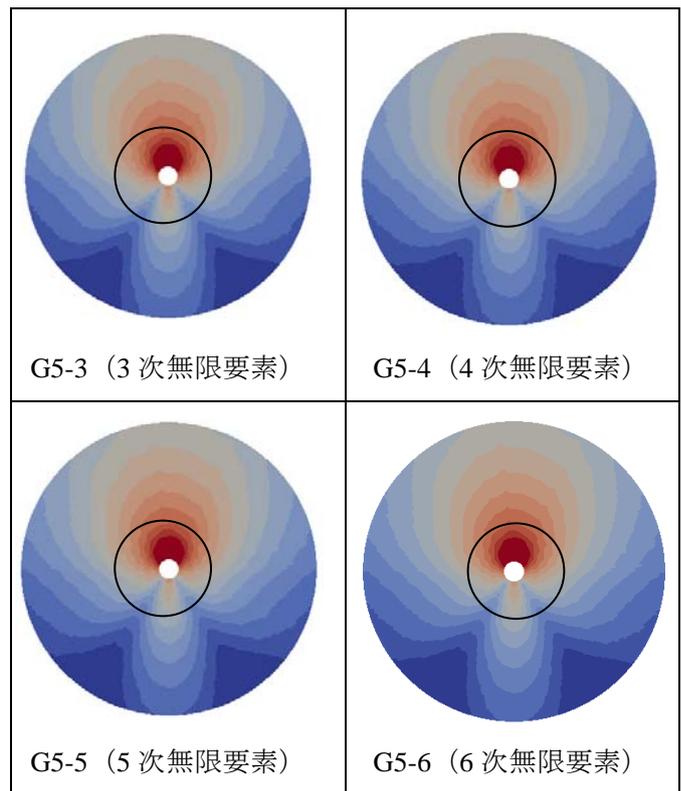


図 74 無限要素と ρc 境界の音圧レベルの比較 (X 軸上、1kHz)

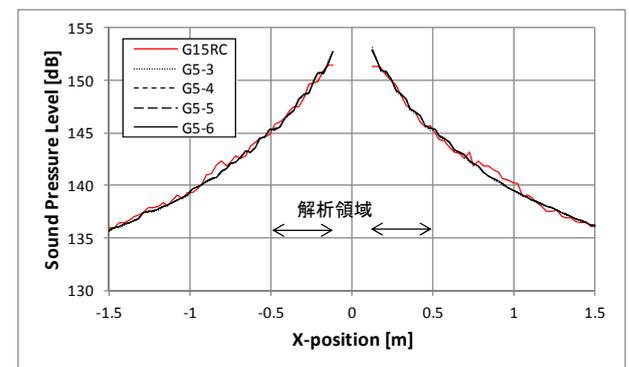


図 75 無限要素と ρc 境界の音圧レベルの比較 (Z 軸上、1kHz)

6.10. 無限要素の節点位置に関する感度解析

無限要素の節点位置に関する感度解析を目的として、無限要素の節点間隔を変更したケースを実施した。前節で無限要素の次数の妥当性を確認したため、ここでは、いずれのケースも次数は5次の無限要素とした。アルゴリズム上確認すべきことは、次の2点である。節点間隔が長いと節点内を Legendre の多項式で補間するため、有効桁数の関係で精度が落ちることがある。また、間隔が短いと多くの情報を持ってないため志度が落ちることがある。従って、この感度解析で妥当な距離間隔が得られることを期待して解析を実施した。

ここでは、節点の間隔を標準の 0.5 に対して、0.1, 0.2, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0 と設定してテストを行った。解析結果では、節点間隔が 5.0 および 10.0 では収束しなかった。また、処理時間は 0.5 の値が最も収束しやいため、今後はこの値をデフォルト値として採用することにした。

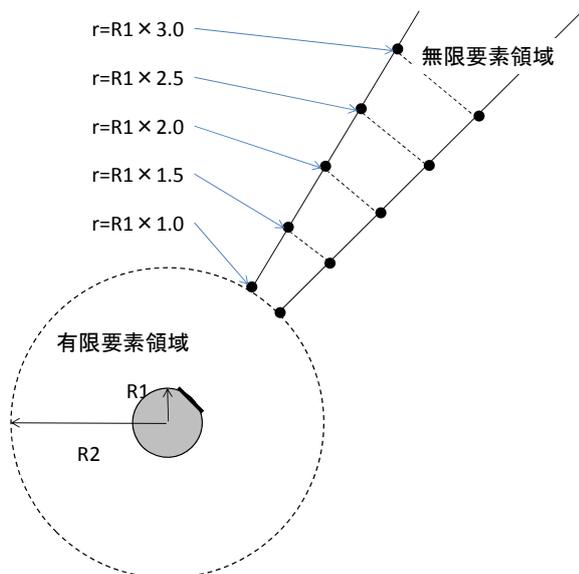


図 76 標準となる節点位置の設定 (0.5 刻み)

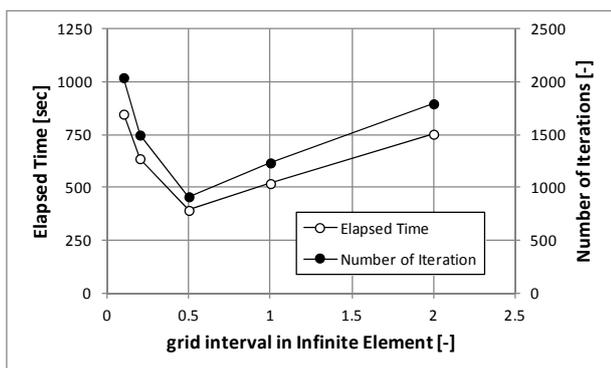


図 77 節点位置と処理時間および反復回数

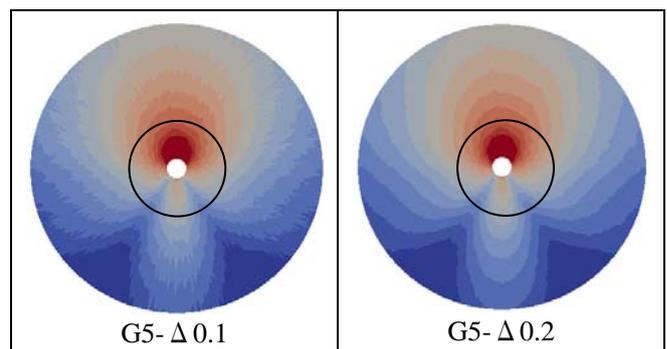
表 26 解析条件と解析結果一覧 (1,2kHz)

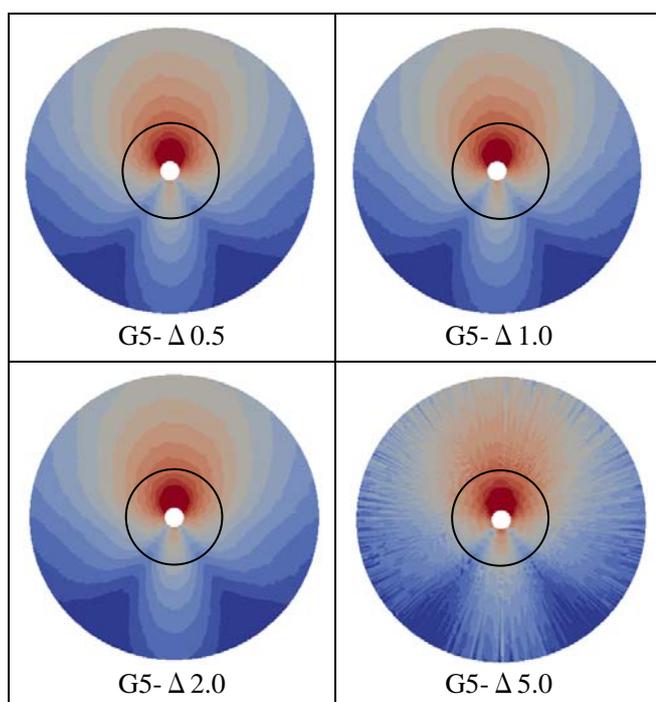
ケース名	G5-D0.1	G5-D0.2	G5-D0.5
周波数	2 kHz	2 kHz	2 kHz
内部境界半径	0.1	0.1	0.1
外部境界半径	0.5	0.5	0.5
外部境界	無限要素	無限要素	無限要素
有限要素数	2,960,984	2,960,984	2,960,984
節点数	512,548	512,548	512,548
無限要素次数	5	5	5
無限要素節点位置	0.1 刻み	0.2 刻み	0.5 刻み
無限要素数	76,816	76,816	76,816
無限要素節点数	153,640	153,640	153,640
並列数	12	12	12
処理時間 [sec]	847.0	636.0	391.0
ソルバー反復回数	2040	1496	911

表 27 解析条件と解析結果一覧 (1,2kHz)

ケース名	G5-D1.0	G5-D2.0	G5-D5.0
周波数	2 kHz	2 kHz	2 kHz
内部境界半径	0.1	0.1	0.1
外部境界半径	0.5	0.5	0.5
外部境界	無限要素	無限要素	無限要素
有限要素数	2,960,984	2,960,984	2,960,984
節点数	512,548	512,548	512,548
無限要素次数	5	5	5
無限要素節点位置	1.0 刻み	2.0 刻み	5.0 刻み
無限要素数	76,816	76,816	76,816
無限要素節点数	153,640	153,640	153,640
並列数	12	12	12
処理時間 [sec]	518.0	752.0	×
ソルバー反復回数	1232	1792	×

表 28 無限要素結果 (2kHz、黒枠が解析領域)





6.11. まとめ

本テストでは、テスト1およびテスト2で実施した外部境界での音の透過と合わせ、低周波の音の回り込みが妥当に評価できることを確認することを目的として本テストを設定した。ここでは、無限要素を利用した大規模解析を実施するとともに、妥当な R2 および無限境界のパラメータのデフォルト値を決定するための解析を行った。ここで得られた結論は次の通りである。

- ① 無限要素を利用して2億要素の解析を実施した。同程度の ρc 境界の解析と比較して、同程度の処理時間およびメモリで解析可能であることを確認した。
- ② 無限要素を貼り付ける領域（本テストではパラメータ R2）については、波長の2倍程度の領域を設けることで妥当な結果を得ることができた。
- ③ 無限要素の次数は5次程度で妥当な結果を得られることが分かった。
- ④ 無限要素の節点位置については、無限要素を貼り付ける球の半径の半分程度の間隔で節点を設定することで妥当な結果が得られることが分かった。
- ⑤ 本テストでは、いずれの結果についても、無限要素を利用したケースと、十分に大きな領

域を設定した ρc 境界のケースとで、音響速度ポテンシャルおよび音圧レベルを比較することで評価を行った。

ここで、③および④で得られた結論については、無限要素を利用するケースでのデフォルト値として採用することとした。

7. おわりに

7.1. 無限要素導入のまとめ

音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise に対して無限要素を導入し、外部問題を精度良く高速に解析できる仕組みを導入した。3 タイプの例題で無限要素の基本的なテストを行った。ここでは、無限要素を利用した解析では有限要素部分での解が理論解とほぼ一致することを確認した。また、無限要素を用いて計算できる観測点での解も理論解とほぼ一致することを確認できた。これらの結果から無限要素は十分に実用的であることを確認できたのみならず、無限要素については下記の利点を確認できた。

- ① テスト1の偏心した音源のケースから ρc 境界よりも無限要素の方が妥当な結果を得られることで、これまでの ρc 境界の弱点を克服できることを確認した。
- ② テスト2から ρc 境界よりも無限要素を利用する方が解析領域を小さくでき、高速に解析を行うことができることを確認した。
- ③ テスト3では無限要素を利用した2億要素までの大規模解析を実施し、無限要素が大規模計算に適用可能であることを確認した。

今後、無限要素については、実用的な問題でお客さまに利用していただきながら事例を積み重ね、必要に応じて改良を加えていく予定である。

7.2. 今後の計画

音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise は、2006年に最初のリリース以来、お客さまのニーズに基づき開発を進め、お客さまに利用していただいている。本稿で述べた通り2016年10月にリリースしたバージョンにて、無限要素の機能を組み込んだ。この機能により、これまで有限要素法の

弱点とされできた外部問題を解決することができ、本ソフトウェアの用途を拡大することが可能となった。

今後の改良点として、さらなる複雑で大規模問題に対応するための高速化の課題がある。本課題は永遠のテーマではあるが、改良の試みを継続していく。また、機能面では、透過損失および吸音モデルの整備を計画している。例えば、現在利用可能な吸音モデル[7]では、Miki モデルのみであるが、これをいくつかのモデルにまで拡張することを予定している。同様に透過損失についても利用しやすいように整備を進めていく計画である。今後ともお客様のニーズをもとにさらなる改良を進め、本ソフトウェアがより多くのお客様に利用いただけるように発展させていく所存である。

参考文献

- [1] R.M.Munt,"Acoustic Transmission Properties of a JetPipe with Subsonic Jet Flow:I. The Cold Jet Refraction Coefficient,"Journal of Sound and Vibration, 142(3), 413-436. 1990
- [2] R.M.Munt,"The interaction of sound with a subsonic jet issuing from a semi-infinite cylindrical pipe,"Journal of Fluid Mechanics, Vol.83, part 4, 142(3), 609-640. 1977
- [3] H. Levine et.al,"On the radiation of sound from an unflanged circular pipe", Phys. Rev. 73, 383-406 (1948)
- [4] Stephen Kirkup, "The Boundary Element Method in Acoustics," Integrated Sound Software(1998)
- [5] D. S. Burnett and R. L. Holford. Prolate and oblate spheroidal acoustic infinite elements. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., 158:117-141, 1998.
- [6] K. Gerdes,"A summary of Infinite Element formulations for exterior Helmholtz problems," Seminar für Angewandte Mathematik, ETH Zürich, CH-8092 Zürich, Switzerland, Available online 25 January

1999

- [7] Jean Allard, Noureddine Atalla; "Propagation of Sound in Porous Media: Modelling Sound Absorbing Materials," Wiley,(October 2009)
- [8] Philip M. Morse, K. Uno Ingard,; "Theoretical Acoustics," Princeton University Press(1968)

※ 技術情報誌アドバンスシミュレーションは、アドバンスソフト株式会社 ホームページのシミュレーション図書館から、PDF ファイルがダウンロードできます。(ダウンロードしていただくには、アドバンス/シミュレーションフォーラム会員登録が必要です。)