

構造解析ソフトウェア Advance/FrontSTR の新機能

袁 熙*

Advance/FrontSTR

Xi Yuan*

Advance/FrontSTR は固体の変形や熱伝導を、有限要素法を用いた 3次元で解析するソフトウェアである。本ソフトウェアは大規模解析に適していることを特徴としている。これまでに、アドバンスソフトでは、ユーザーのニーズを応じて改良や機能追加を行ってきた。本稿では、当社で実施した改良のうち、部分構造合成法(Component Mode Synthesis 法)に関する計算原理・機能とその適用事例を中心に紹介する。

Key word: CMS 法、Craig-Bampton モード、MacNeal-Rubin モード、Dual Craig-Bampton 法

1. はじめに

構造解析プログラム Advance/FrontSTR のベースとなる FrontISTR は、文部科学省の次世代 IT 基盤構築のための研究開発「イノベーション基盤シミュレーションソフトウェアの研究開発」プロジェクトで開発された FrontISTR の公開からこの数年間、当社は以下の観点から FrontISTR を改良し、商用パッケージ Advance/FrontSTR を提供できた。

- ① ソフトウェア工学：開発・運用・保守しやすいソフトウェアを目指している。
- ② ユーザビリティの向上：FrontISTR 内重複、不要な機能、入力などを削除、整合し、明快なユーザー入力格式を整備する。また、多様な境界、荷重条件などを定義できる手段を追加する。
- ③ 計算の高速化、ロバスト性の向上：主に非線形解析の収束性に注目した。ユーザーまたはプログラム内のパラメータ調整機能の追加、新しいアルゴリズムや自動増分ステップ調整機能の開発することより計算のロバスト性の向上を図る。
- ④ 解析機能の追加：構造解析ソフトウェアの基

本機能（要素、材質モデル、解法）を備えたという認識を持つ以降、主にユーザーのニーズを応じ開発作業を行っている。

本稿では、Advance/FrontSTR 5.2 に新たに導入した部分構造モード合成法(Component Mode Synthesis、CMS 法とも呼ぶ)解析機能の計算原理・機能とその適用事例を紹介し、最後に今後の開発予定を述べる。

CMS 法の開発の背景には以下のユーザーのニーズを応じたことである：短時間で計算できる大規模なメッシュを用いた接触している物体の振動解析である。振動物体の変形が小さいので、モード合成法を使用したいが、接触条件が非線形であるため、一般的なモード合成法を使用できない。この課題に対し、CMS 法は解を提供した。

2. CMS 法の原理

2.1. CMS 法の概要

Model Order Reduction(MOR)の手法の 1つとして、モード合成法による動的解析は普通な有限要素法解析と比べ計算量が急激に減り、計算効率がよい方法と知られている。しかし、一般的なモード合成法は基本的には線形解析しか対応できず、応用面は狭い欠点がある。部分構造モード合成法(Component Mode Synthesis 法、以下 CMS 法)は、ある構造物を幾つかの子構造

*アドバンスソフト株式会社 第 1 事業部

1st Computational Science and Engineering
Group, AdvanceSoft Corporation

に分解し、各子構造のモードを求めた後、子構造間の接合面に連続条件を加え整合する手法である。CMS 法の特徴の 1 つは各子構造の接合面上の非線形行為を考慮することができることである。実際の応用上、例えばマルチボディダイナミクス構造では、子構造(部品)の変形が小さく、子構造(部品)間の接合面が大きな変位が起きる構造が多く存在する。そのため、CMS 合成法の導入することより、MOR 手法としたモード合成法の応用が大幅に拡張しているので、Advance/FrontSTR 5.2 ではこの手法を導入した。

CMS 法は Rayleigh-Ritz 近似手法の 1 つとして大規模線形動的解析の自由度低減するため考案された手法である。1965 年 Hurty[1]は接合面(I/F)モード概念を提出し、これは CMS 法の先駆と言われている。その I/F モードは Craig らに修正され、現在 Craig-Bampton モードと呼ぶ。Craig-Bampton モードは子構造間の接合面を固定する拘束モードである。その後、1970 年代では CMS 法は盛んに研究され、いくつかの I/F モードを開発されたが、この中よく使われているものの 1 つは MacNeal[3]と Rubin[4]または Craig と Chang[5], Martinez ら[6] による MacNeal-Rubin または Craig-Chang モード。MacNeal-Rubin は子構造間の接合面を自由にする非拘束モードである。もう 1 つよく使われている I/F モードは Benfield と Hruda[7]による Benfield-Hruda モードまたは荷重モードである。この荷重モードは隣接部材の質量と剛性を考慮されている。

Advance/FrontSTR は現在 Craig-Bampton モードと MacNeal-Rubin モードを導入している。

2.2. 計算規模縮減するための CMS 法

動的問題の基本方程式

$$\tilde{M}\ddot{\mathbf{u}} + \tilde{C}\dot{\mathbf{u}} + \tilde{K}\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (1)$$

を解く前

$$\Phi\mathbf{u} = \mathbf{q} \quad (2)$$

を長さ n の変位ベクトル \mathbf{u} を $m \times n$ の変換マトリクス Φ (Ritz ベクトルまたはモードとも呼ぶ)をかけ、一般化された自由度 \mathbf{q} まで変換する。さらに式(1)の両側に Φ^T かけ

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} &= \mathbf{F} \\ \mathbf{M} &= \Phi^T \tilde{\mathbf{M}} \Phi; \quad \mathbf{C} = \Phi^T \tilde{\mathbf{C}} \Phi \\ \mathbf{K} &= \Phi^T \tilde{\mathbf{K}} \Phi; \quad \mathbf{F} = \Phi^T \tilde{\mathbf{F}} \end{aligned} \quad (3)$$

が得られ、求めるべき自由度の数は n から m まで変換できる。 $m \ll n$ の時、計算規模が大幅に縮減できる。複数の構造体が有する時、式(3)の他、構造体間の隣接条件

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}^A, \mathbf{u}^B) = \mathbf{0}; \quad \mathbf{L}(\mathbf{f}^A, \mathbf{f}^B) = \mathbf{0} \quad (4)$$

が必要となる。ここでは、 $\mathbf{B}(\mathbf{u}^A, \mathbf{u}^B)$ は隣接面の変位連続条件、 $\mathbf{L}(\mathbf{f}^A, \mathbf{f}^B)$ は隣接面の釣り合い条件である。CMS 法ではこのような隣接条件を表すため、式(2)はしばしば

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_B \end{Bmatrix} = [\Phi_I \quad \Phi_B] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{u}_B \end{Bmatrix} \quad (5)$$

のように、内部自由度 I と境界自由度 B を二部分に分け、境界自由度は縮退しないまま残す。この時解くべき方程式が

$$\mathbf{M} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_I \\ \ddot{\mathbf{u}}_B \end{Bmatrix} + \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_I \\ \dot{\mathbf{u}}_B \end{Bmatrix} + \mathbf{K} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{u}_B \end{Bmatrix} = \mathbf{F} \quad (6)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}; \quad \mathbf{L}(\mathbf{f}) = \mathbf{0}$$

となる。式(1)と同じ、式(2)は中央差分法や Newmark- β 法のような時間積分手法を用い解析可能である。また、静的解析を行う場合では式

$$\mathbf{K} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{u}_B \end{Bmatrix} = \mathbf{F} \quad (7)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}; \quad \mathbf{L}(\mathbf{f}) = \mathbf{0}$$

を用い、固有値解析の場合では

$$\mathbf{K} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{u}_B \end{Bmatrix} = \Lambda \mathbf{M} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{u}_B \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}; \quad \mathbf{L}(\mathbf{f}) = \mathbf{0}$$

を利用すれば計算可能である。

2.3. CMS モード

CMS 解析中利用するモードは以下である：

(1) 固有モード

固有値問題

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\Phi = 0 \quad (9)$$

から得られる。ここでは、固有モードはマスマトリクスより正規化される。

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}; \quad \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda \equiv \text{diag}(\omega^2) \quad (10)$$

また、剛性マトリクス \mathbf{K} は実対称なので、そのスペクトル分解以下のように固有モードより表すことができる。

$$\mathbf{K} = \Phi \Lambda \Phi^T; \quad \mathbf{K}^{-1} = \Phi \Lambda^{-1} \Phi^T \quad (11)$$

(2) 拘束モード・Craig-Bampton モード

拘束モード境界面自由度 \mathbf{u}_B と内部自由度 \mathbf{u}_I の関係を表すモードである。このモードは静的、境界面に外力なしの仮定の元、式(1)から

$$\check{\mathbf{K}}_{II} \mathbf{u}_I + \check{\mathbf{K}}_{IB} \mathbf{u}_B = 0; \quad \mathbf{u}_I = -\check{\mathbf{K}}_{II}^{-1} \check{\mathbf{K}}_{IB} \mathbf{u}_B \quad (12)$$

が得られる。このため

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\check{\mathbf{K}}_{II}^{-1} \check{\mathbf{K}}_{IB} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u}_B = \begin{bmatrix} \Psi_c \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u}_B \quad (13)$$

拘束モードを採用する時、界面自由度を完全拘束する $\mathbf{u}_B=0$ した条件で固有モードを求める。その時式(9)は以下のようになる：

$$(\mathbf{K}_{II} - \omega_c^2 \mathbf{M}_{II})\Phi_c = 0 \quad (14)$$

拘束モード(13)と合わせ

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_c & \Psi_c \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} \quad (15)$$

これは Craig-Bampton モードである。

(3) 剰余連結モード・MacNeal-Rubin モード

変位 \mathbf{u} を以下のように固有モードより表す：

$$\mathbf{u} = \Phi_l \mathbf{q}_l + \Phi_h \mathbf{q}_h \quad (16)$$

ここでは、 Φ_l は低次から採用モードの次数までの固有モード、 Φ_h はその以外の高次モード(剰余モード)である。この式(1)に代入し、両側 Φ をかけると

$$(\Lambda_l - \omega^2 \mathbf{I})\mathbf{q}_l = \Phi_l^T \mathbf{F} \quad (17)$$

$$(\Lambda_h - \omega^2 \mathbf{I})\mathbf{q}_h = \Phi_h^T \mathbf{F}$$

が得られる。この式から

$$\forall \omega_h \in \text{diag}(\Lambda_h), \omega \ll \omega_h \quad \mathbf{q}_h = \Lambda_h^{-1} \Phi_h^T \mathbf{F} \quad (18)$$

が得られる。そこで、式(16)は

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{q} + \mathbf{G} \mathbf{F}; \quad \mathbf{G} = \Phi_h \Lambda_h^{-1} \Phi_h^T \quad (19)$$

となる。ここで \mathbf{G} は剰余連結モードと呼び、式(19)は MacNeal-Rubin モードを示している。

MacNeal-Rubin モードを求める時、境界面に特に拘束条件を加える必要がなく、非拘束モードである。しかし、剰余連結モード \mathbf{G} を求めるのに、採用モードより高次の固有モードを求めることが必要となり、これを避けるため、式(11)を利用することより

$$\mathbf{G} = \mathbf{K}^{-1} - \Phi_l \Lambda_l^{-1} \Phi_l^T \quad (20)$$

得られ、この式を使って剰余連結モードを計算することができる。

2.4. モード合成方法

隣接している部材界面では、式(4)に示した変位連続条件と力の釣り合いが必要である。しかし

$$\mathbf{L} = \text{null}(\mathbf{B}); \quad \mathbf{B}^T = \text{null}(\mathbf{L}^T) \quad (21)$$

という双対関係になっているので[8], \mathbf{L} または \mathbf{B} のどちらによる定式化とも可能である。

(1) 補形式の定式化

下記を採用している

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{B}^T \lambda = \mathbf{F} \quad (22)$$

$$\mathbf{B} \mathbf{u} = 0$$

この定式化を採用すると、Craig-Bampton モードをそのまま使用できるが、MacNeal-Rubin モードは隣接面の力を用いた定式なので、この変数を隣接面の変位へ変換する必要がある。

Craig-Martinez 変換[5,6]では、まず式(19)を

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_i & \mathbf{G}_i \\ \Phi_b & \mathbf{G}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix} \quad (23)$$

のように書き換え、その第一式から

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{G}_b^{-1} (\mathbf{u}_b - \Phi_b \mathbf{q}_b) \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G}_b^{-1}\Phi_b & \mathbf{G}_b^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} = \mathbf{R}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} \quad (25)$$

が得られる。この式が式(23)に代入すると

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} &= \mathbf{R}\mathbf{R}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_i - \mathbf{G}_i\mathbf{G}_b^{-1}\Phi_b & \mathbf{G}_i\mathbf{G}_b^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

が得られる。この式は式(15)と同じ形式となり、同じ手法を隣接条件に加えることができる。

(2) Dual Craig-Bampton 法 [9]

隣接面の力 \mathbf{f}_b は Lagrange 乗数 λ との関係は以下である:

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{B}\lambda \quad (27)$$

この式を式(23)に代入し

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{G}_{res} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \Phi_{dc} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\mathbf{G}_{res} = \mathbf{G}\mathbf{B}$$

この式を補形式の動的問題の基本方程式(1)を代入すると

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_I^{(a)} \\ \dot{\mathbf{u}}_B^{(a)} \\ \dot{\lambda} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_I^{(a)} \\ \mathbf{u}_B^{(a)} \\ \lambda \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \Lambda & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_I^{(a)} \\ \mathbf{u}_B^{(a)} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^A \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

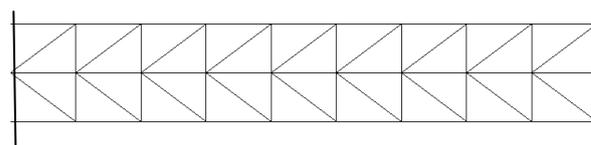
$$\mathbf{B}^{(a)}\mathbf{u}^{(a)} = 0$$

が得られる。この定式化は式(26)に示した変換計算が必要ないので、計算効率よい手法である。

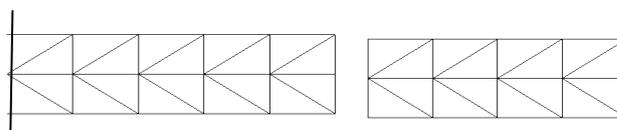
3. 解析事例

3.1. 解析モデル

文献[7]に示したトラス構造を採用した。モデルは均一材料のトラスから構築され、Advance/FrontSTR を用い、一体化モデルと CMS モデル両方を用い、固有値解析、静的変形解析、動的変形解析を行い、その計算結果を比較した。なお、CMS 解析では Craig-Bampton モードおよび MacNeal-Rubin モードを用いた。



(a) 一体化モデル



(b) CMS モデル

図 1 解析モデル

3.2. 解析結果

(1) 固有値解析

表 1 固有値結果比較

| | 一体モデル | Craig-Bampton | | MacNeal-Rubin | |
|----|-------|---------------|--------|---------------|--------|
| | | | 誤差 | | 誤差 |
| 1 | 1146 | 1137 | -0.8% | 1137 | -0.8% |
| 2 | 5642 | 5554 | -1.5% | 5554 | -1.5% |
| 3 | 9128 | 9004 | -1.4% | 9004 | -1.4% |
| 4 | 12553 | 12493 | -0.47% | 12493 | -0.47% |
| 5 | 19412 | 19320 | -0.47% | 19320 | -0.47% |
| 6 | 25820 | 25385 | -1.7% | 25385 | -1.7% |
| 7 | 26798 | 26606 | -0.72% | 26610 | -0.7% |
| 8 | 31317 | 31262 | -0.17% | 31262 | -0.17% |
| 9 | 35889 | 35336 | -1.5% | 35338 | -1.5% |
| 10 | 38896 | 38875 | -0.05% | 38874 | -0.05% |

(2) 静的解析

CMS 法は動的解析ツールであるが、式[7]を用い静的解析も可能性である。図 2 では梁の先端一点で集中荷重を受けた時の変形図を示している。

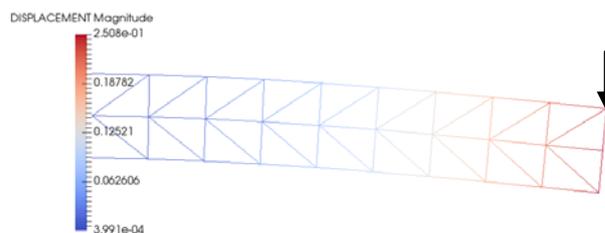


図 2 集中荷重を受けた時の変形図

(3) 動的解析

図 3 は梁の先端一点で集中荷重を受けた時の

荷重点の振動を示している。CMS の結果は一体化モデルの結果とよく一致していることを示した。

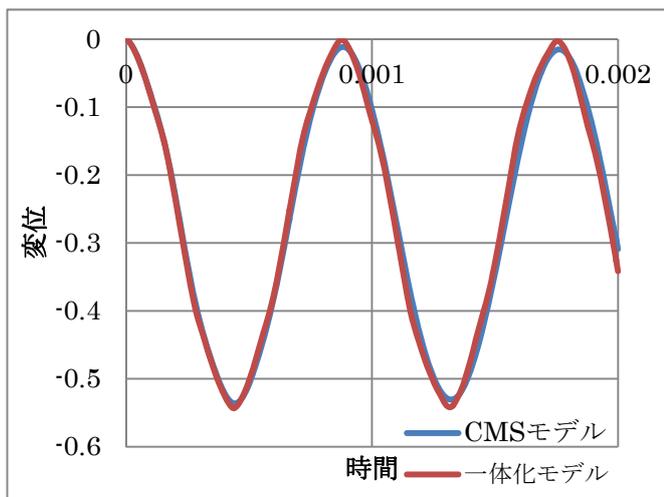


図 3 衝撃波を受ける壁の解析結果

4. まとめ

本稿では Advance/FrontSTR に新たに実装した CMS 法について紹介した。

5. 今後の予定

Advance/FrontSTR は今後もユーザーのニーズに応じた機能追加を行っていく予定である。それとは別に今年度では Advance/FrontSTR の汎用性と拡張性を向上するため、マトリクスのデータ構造や線形ソルバーの抜本的な見直しを行う。2017年リリース予定の Ver.6 では、従来ではいくつかの制約があった混在自由度、MPC や剛体要素の導入などの問題を解決したものをユーザーに提供する計画である。

参考文献

[1] Hurty, W.C., Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes, AIAA Journal Vo.3, No.4, 1965, 678-685

[2] R.R.Craig, A.J.Bampton : Coupling of substructures coupling methods for dynamics analysis, AIAA journal 6.7(1968), pp1313-1319

[3] R.MacNeal: A hybrid method of component for structural Dynamics, Proc. ASCE

85.3(1959), pp67-94

[4] S.Rubin: Improved component mode representation for structural dynamics analysis, AIAA journal 13(8),1974, pp995-1006

[5] R.R.Craig, C.J.Chang: On the use of attachment coupling modes in substructure coupling for dynamic analysis, 18th Structures, Structural Dynamics and Material Conference, 77(405), AIAA. 1977, pp89-99

[6] D. R. Martinez, T. J. Carne, and A. K. Miller, Combined Experimental/Analytical Modeling Using Component Mode Synthesis, Proc. 25th AIAA Structures, Dynamics & materials conference, Palm Springs, CA, 1984

[7] W.A.Benfield, R.F.Hrude, Vibration Analysis of Structures by Component Mode Substitutions, AIAA Journal, 9(7),1971, pp1255-1261

[8] D.de.Klek, D.J.Rixen, S.N.Voormeeren, General Framework for Dynamic Substructuring: History, Review, and Classification of Techniques, 46(5), AIAA. 2008, pp1109~1181

[9] D.J.Rixen: A dual Craig-Bampton method for dynamic substructuring, J. Comp. Appl. Math., 168,2004, pp383-391

※技術情報誌アドバンスシミュレーションは、アドバンスソフト株式会社 ホームページのシミュレーション図書館から、PDF ファイルがダウンロードできます。(ダウンロードしていただくには、アドバンス/シミュレーションフォーラム会員登録が必要です。)