

Whisker-Weaving法の概要とその反例について

徳永 健一*

An abstract of Whisker-Weaving Method and its Counter Example

Ken-ichi Tokunaga*

Whisker-Weaving 法とは、Tautges[1][2]らによって発表された六面体のメッシュ生成手法の一種で、商用のメッシュ生成ソフトウェアの一部にも組み込まれている。そのアルゴリズムの日本語による解説がほとんどないことから、ここに簡単に紹介することとし、またこの手法では生成できないような例を紹介する。

Key word: hexahedral mesh generation

1. Spatial Twist Continuum

Whisker-Weaving 法の準備として、Spatial Twist Continuum (STC) について説明する。四角形の表面メッシュまたは六面体メッシュについて、その双対的な構造を見るための方法が STC である。

1.1. 定義

四角形表面メッシュに対する STC とは、

- ① 四角形それぞれの中心に STC の頂点を置く
- ② 隣接する四角形に対して、STC の頂点同士を四角形の辺と交叉し接続して STC の辺とする
- ③ 表面メッシュの頂点の周りを囲む四角形について、それらの中心を結ぶ STC の辺で囲まれる領域を STC の 2 セルとする

ような組み合わせ構造のことである。

表 1 四角形メッシュ

四角形メッシュ	次元	STC	次元
四角形	2	頂点	0
辺	1	辺	1
頂点	0	2 セル	2

1.2. 定義

四角形に対応する STC 頂点と、その四角形の対辺に隣接する四角形の STC 頂点を結ぶ STC 辺をメッシュのすべての四角形について連結したものを四角形メッシュ上の曲線とみなして chord と呼ぶ。

1.3. 系

四角形表面メッシュの STC 頂点は、2 つの chord の、または 1 つの chord の自分自身との交叉点である。(3 つ以上の chord が 1 点で交叉することはない。)

1.4. 系

閉じた四角形表面メッシュの chord は閉じている (以下では loop と言う)。

1.5. 定義

六面体メッシュに対する STC とは、

- ① 六面体それぞれの中心に STC の頂点を置く
- ② 隣接する六面体に対して、STC の頂点同士を六面体の面と交叉して接続したものを STC の辺とする
- ③ メッシュの辺の周りを囲む六面体について、それらの中心を結ぶ STC の辺で囲まれる面を STC の 2 セルとする

*アドバンスソフト株式会社 第 1 事業部
1st Computational Science and Engineering
Group, AdvanceSoft Corporation

- ④ メッシュの頂点の周りを囲む六面体について、STC の 2 セルで囲まれる領域を STC の 3 セルとする
組み合わせ構造のことである。

表 2 六面体メッシュ

六面体メッシュ	次元	STC	次元
六面体	3	頂点	0
面	2	辺	1
辺	1	2 セル	2
頂点	0	3 セル	3

1.6. 定義

六面体の 12 本の辺を 3 方向の辺の 4 つずつの組として、同じ方向の辺に対応する STC2 セルをメッシュのすべての六面体について連結したものを、六面体メッシュの曲面とみなして sheet と呼ぶ。

1.7. 定義

六面体の 6 つの面の対面について、対応する STC 辺をメッシュのすべての六面体について連結したものを、六面体メッシュの内部の曲線とみなして chord と呼ぶ。

1.8. 系

六面体メッシュの chord は 2 つの sheet の交わりである (sheet は自分自身との交わりを許す)。

1.9. 系

六面体メッシュの STC 頂点は、3 つの chord の交叉点である (3 つの chord の中で重複するものがあるのを許す)。また、3 つの sheet の交叉点である (3 つの sheet の中で重複するものがあるのを許す)。

1.10. 系

六面体メッシュの STC 構造を六面体メッシュの表面の四角形メッシュに制限すると、表面メッシュの STC 構造になる。特に、六面体メッシュ

の STC 構造の sheet は表面メッシュの STC 構造の chord になる。

2. Whisker-Weaving アルゴリズム

Whisker-Weaving アルゴリズムとは、四角形メッシュからその内部を充填する六面体メッシュを生成する方法で、双対的に四角形メッシュの STC から六面体メッシュの STC を生成する手法である。

四角形メッシュの STC 構造の chord を取り出して、Advancing Front を STC において実行するように六面体メッシュの STC 構造の sheet を構成していく。四角形メッシュの STC 構造と六面体メッシュの STC 構造では実空間の次元が 1 ずれていることに注意する。

2.1. STEP1

四角形メッシュの STC 構造の chord(loop) それぞれについて、以下のような図式を作成する。

- ① STC 頂点を結ぶ多角形を書いて、多角形の識別子をつける
- ② STC 頂点に元の四角形メッシュの四角形に与えられた識別子に対応させて、多角形の内側に書く
- ③ それぞれの STC 頂点において、交叉している相手の chord に対応する多角形の識別子を外側に書く

以下のように書く場合もある。

- (ア) STC 頂点を結ぶ多角形を書いて、多角形の識別子をつける
 - (イ) それぞれの STC 頂点において、多角形と交叉するように短い線分を重ねて書く
 - (ウ) 線分の外側の端点に STC 頂点の識別子、内側の端点に交叉相手の識別子を書く
- (いずれの場合もオリジナルの Tauges の記法とは内と外に書く識別子が逆である)

六面体メッシュが生成した時にこれが STC 構造の Sheet になることから、この多角形を Whisker Sheet という。

2.2. STEP2

次を満たすような Whisker Sheet の隣接した頂点の組を 3 つ探す。

- ① それぞれの組がすべて異なる Whisker Sheet に属する
- ② STC 頂点の識別子が (A,B) (B,C) (C,A) のパターンになっている。

2.3. STEP3

STEP2 で見つけた 3 つの頂点の組に対して、その属する Whisker Sheet を更新する。

- ① Whisker Sheet における頂点の組を STC 頂点の識別子、交叉する相手の識別子とあわせて交換する

STEP1 で後者の方法で行った場合は、交差している短い線分を更新する。

- ② Whisker Sheet における頂点の組において、両方の頂点の短い線分を内側に延長して交叉させる

Whisker Sheet の頂点の隣接関係は、短い線分の内側の端点で定義する。

2.4. STEP4

次を満たすような Whisker Sheet の隣接した頂点の組を 2 つ探す。

- ① 交叉相手の識別子が等しい
- ② STC 頂点の識別子が (A,B) (A,B) のパターンになっている

2.5. STEP5

STEP4 で見つけた 2 つの頂点の組に対して、その属する Whisker Sheet を更新する。

- ① Whisker Sheet における頂点の組を除外する
- STEP1 で後者の方法で行った場合は、線分を連結する。

(ア) Whisker Sheet における頂点の組において、両方の頂点の短い線分を連結させる

Whisker Sheet が消滅（内部の短い線分がすべて連結される）することもある。

短い線分が連結されたら、隣接関係はそれをスキップして定義する。

2.6. STEP6

STEP4、STEP5 を STEP4 を満たすものがないまで繰り返す。

2.7. STEP7

Whisker Sheet がすべて消滅したら終了。

残っている Whisker Sheet があれば、STEP2 に戻る。

STEP3 で四角形メッシュの chord が更新されるが、これは四角形メッシュの内部に六面体メッシュが与えられて、表面メッシュが内側に更新したことに対応している。②の短い線分を交叉してできる点が六面体メッシュの STC 頂点になる。

STEP5 で頂点の組を除外するが、これは四角形メッシュの 2 つの四角形を張り合わせることに対応している。

多角形内の連結された短い線分が六面体メッシュの chord であり、Whisker Sheet が六面体メッシュの sheet になる。

このアルゴリズムでは組み合わせ論的に六面体メッシュを構成していくが、新たに追加された内部の頂点の座標を与えていない。これは幾何学的条件を使って、決定する必要がある。

2.8. 例 1

立方体の 1 つの頂点に小さい立方体がくっついているような場合。

四角形メッシュを斜投影図で手前側、奥側、および展開図で表す。

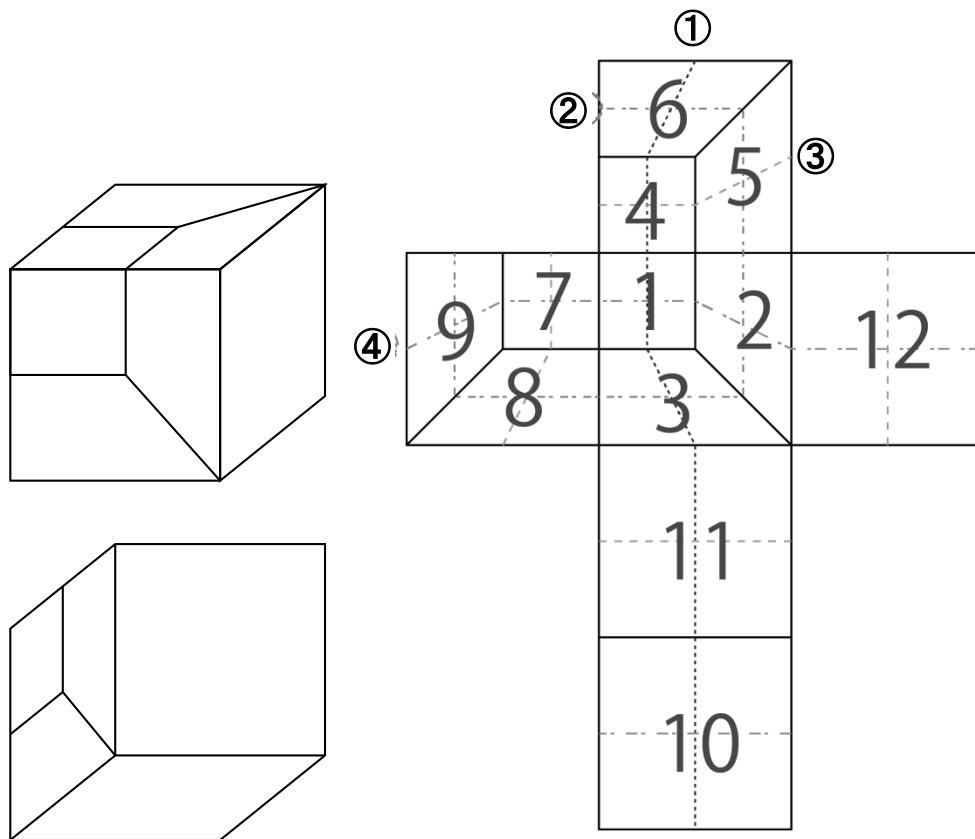
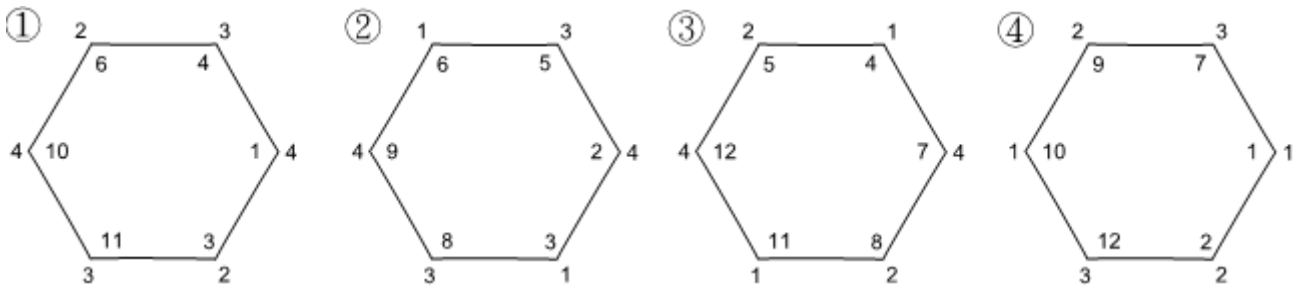
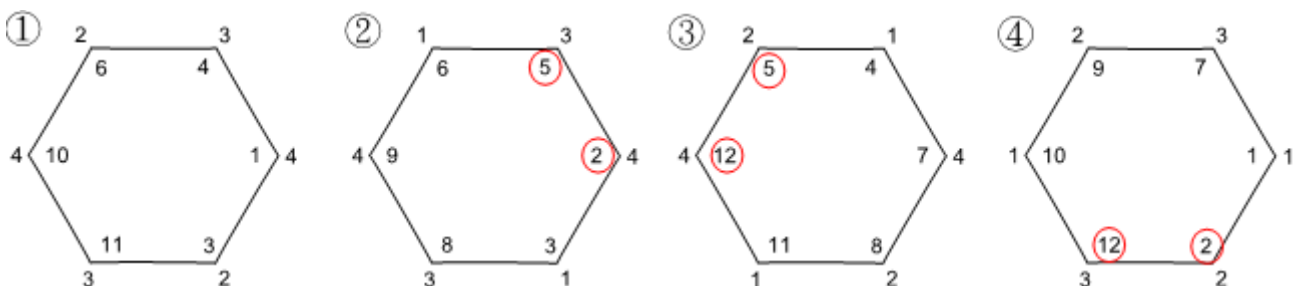


図 1

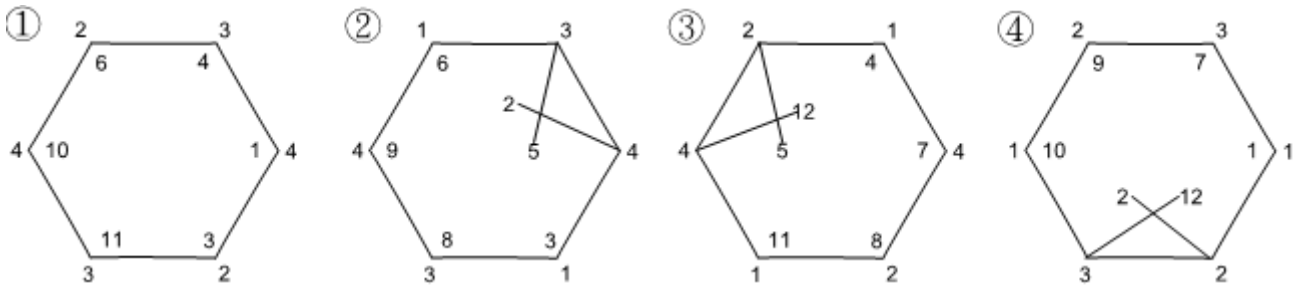
STEP1に従って四角形表面メッシュのloop①から④に対応する Whisker Sheet を書くと以下のようになる。



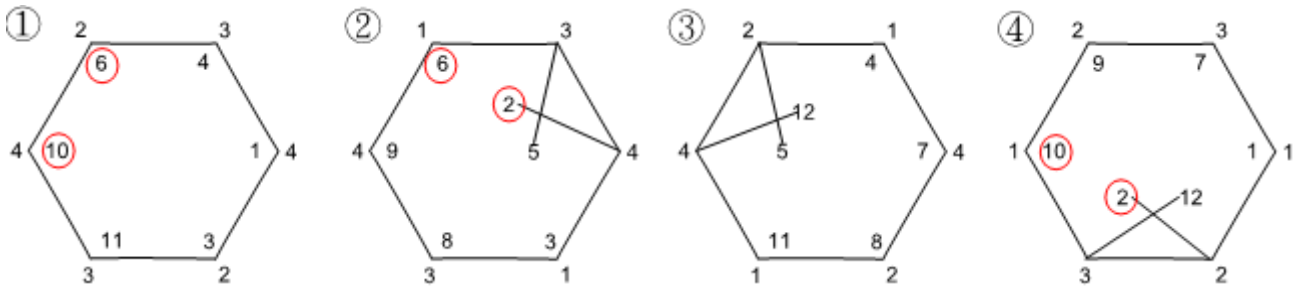
STEP2 の頂点の組として、以下のマーキングされたものを選ぶ。STC 頂点(2,5) (5,12) (12,2) に対応する。



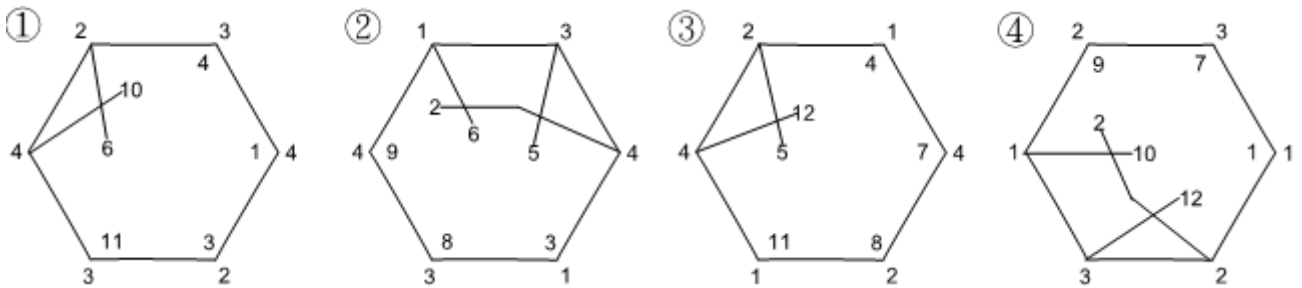
STEP3 で頂点を交叉させる。



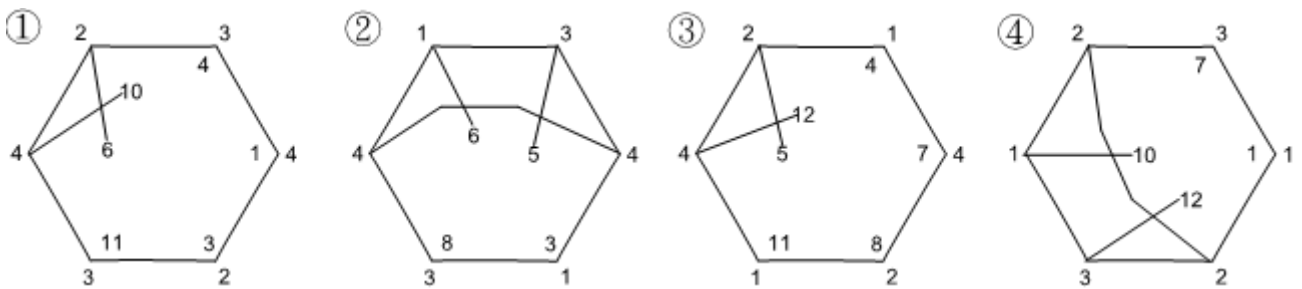
STEP4 を満たすような組はないので、STEP5、STEP6、STEP7 をスキップして再び STEP2 を満たす頂点の組を探す。(2,6) (6,10) (10,2) に対応するものを選ぶ。



STEP3 で頂点を交叉させる。



STEP4 を満たすような組として、(2,9)があるので、それを STEP5 で連結させる。



同様に繰り返して、最終的に以下のような Whisker Sheet を得ることができて、六面体メッシュが生成される。

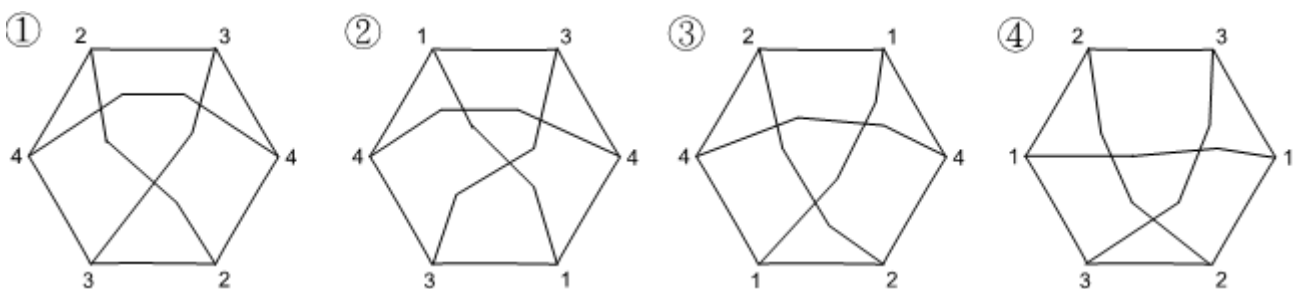


図 2

2.9. 例 2

Geode Template として知られている四角形メ

ッシュの例[3]について、Whisker-Weaving アルゴリズムでの六面体充填の結果を述べよう。

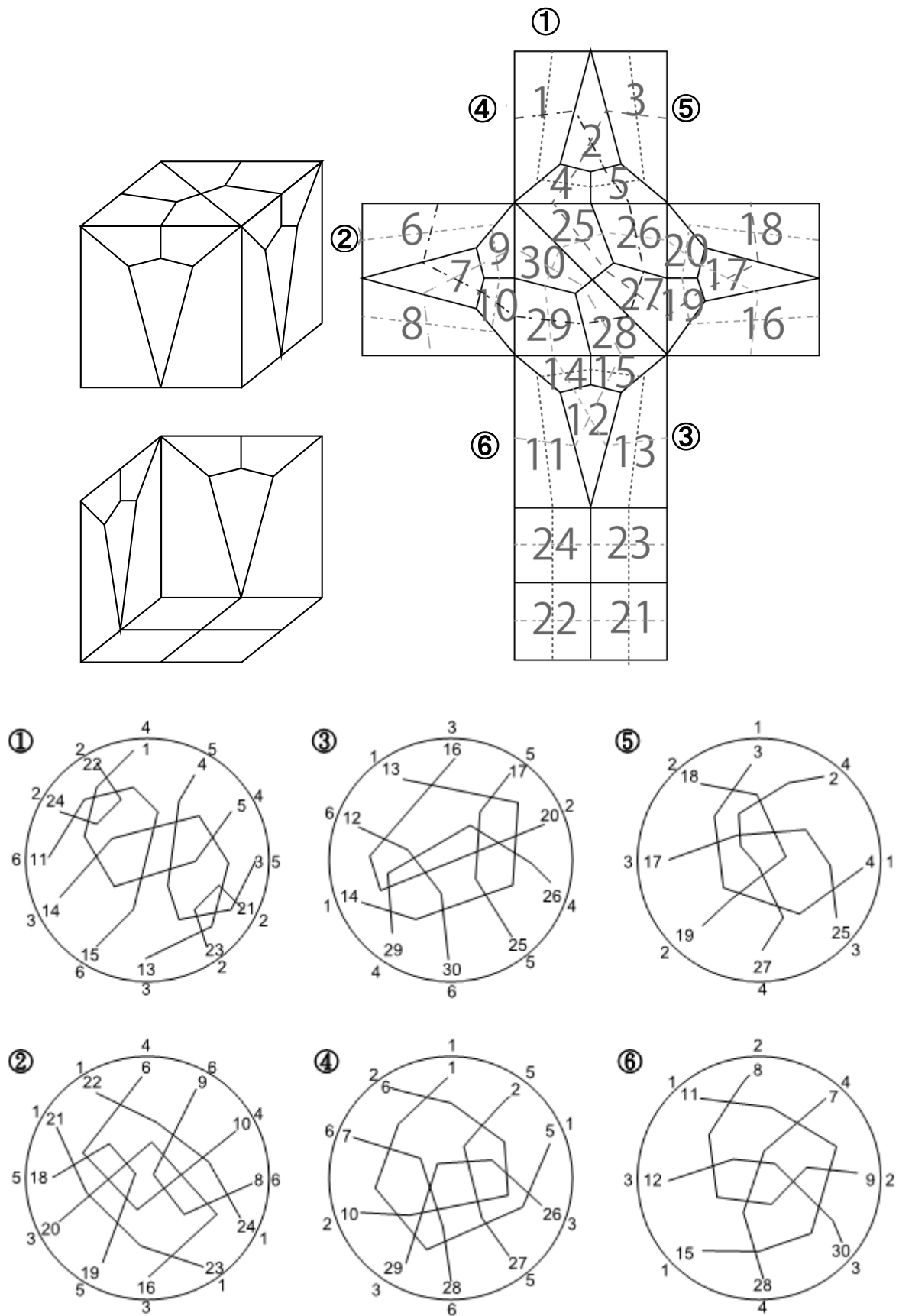


図 3

3. 反例

Whisker-Weaving アルゴリズムで六面体を充填できない四角形メッシュの例を挙げる。できないことを示すために以下の定理を示す。

この章は本稿のオリジナルの主張である。

3.1. 定理

六面体メッシュのすべての面（内部の面も含む）について、ある六面体の対面となる 2 つの四角形を同じ集合に属するとして分割する。すなわち、六面体メッシュの STC 構造の chord ごとにそれらが通る面で類別する。

$$\{ \text{六面体メッシュのすべての面} \} = \coprod \{ \text{chord が通る面} \} \quad (1)$$

このとき、表面四角形メッシュの 2 つの面で、六面体メッシュの STC 構造の同じ chord が通るならば、表面四角形メッシュの交叉するループの識別子は一致する。

言い換えると、表面メッシュのある四角形において STC 構造の l と m の loop が交叉しているならば、六面体メッシュの STC 構造の chord が通る別の四角形についても l と m の loop が交叉している。

3.2. 証明の概略

六面体メッシュの STC 構造における chord は STC 構造の 2 つの sheet の交わりである（自己交叉は許す）。表面四角形メッシュの STC 構造における chord は六面体メッシュの sheet と表面メッシュとの交わりであり、それが loop である。従って六面体メッシュの同じ chord が表面の異なる 2 つの四角形を通るならば（正確に言うと、四角形に対応する STC 頂点を chord が結んでいるならば）、その四角形で交差している loop の組は一致する。

3.3. 系

六面体メッシュで充填可能な四角形メッシュにおいて、STC 構造のある 2 つの loop を与えた時、その交叉する（同一 loop の自己交叉でもよい）

STC 頂点の個数は偶数である。

以下の展開図で与えられる四角形メッシュは、その STC 構造の 2 つの loop について、それぞれの loop の自己交叉する STC 頂点の個数が 3 個である。従って、六面体メッシュで充填できない。

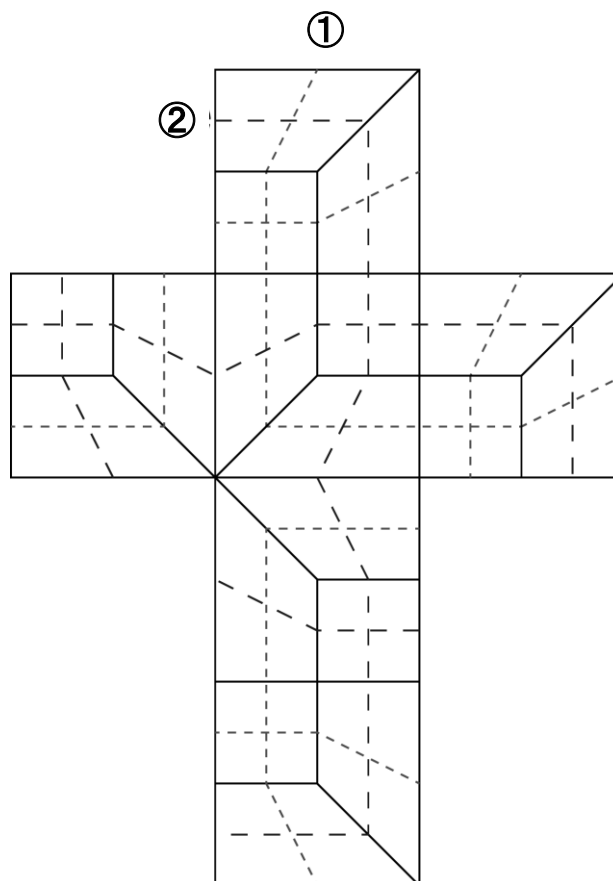


図 4

上の証明は、chord と sheet の概念を用いているが、Whisker-Weaving アルゴリズムの手続き的な性質は使われていない。すなわち Whisker-Weaving アルゴリズムで充填することができないだけでなく、充填する六面体メッシュが存在しないことを証明している。

参考文献

- [1] Tautges, Timothy J., Ted Blacker, and Scott A. Mitchell. "The whisker weaving algorithm: A connectivity-based method for constructing all-hexahedral finite element meshes." International Journal for Numerical Methods in Engineering 39.19

(1996): 3327-3350.

- [2] Tautges, Timothy J. "The generation of hexahedral meshes for assembly geometry: survey and progress." International Journal for Numerical Methods in Engineering 50.12 (2001): 2617-2642.
- [3] Leland, Robert W., et al. "The Geode Algorithm: Combining Hex/Tet Plastering, Dicing and Transition Elements for Automatic, All-Hex Mesh Generation." IMR. 1998.
- [4] Mitchell, Scott A. A characterization of the quadrilateral meshes of a surface which admit a compatible hexahedral mesh of the enclosed volume. Springer Berlin Heidelberg, 1996.

※技術情報誌アドバンスシミュレーションは、アドバンスソフト株式会社 ホームページのシミュレーション図書館から、【カラー版】がダウンロードできます。(ダウンロードしていただくには、アドバンス/シミュレーションフォーラム会員登録が必要です。)