

音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoiseによる 流れを伴うダクト開口端反射率の評価（第1報）

松原 聖* 中森 一郎**

Acoustics Simulation for the Reflection Coefficients out of a Jet Pipe by Advance/FrontNoise

Kiyoshi Matsubara* and Ichiro Nakamori**

Munt[1]らによると 1960 年代半ばの Michel らや Ronneberger の実験により、高速な流れが排出されるダクト開放端における音響反射率が 1.0 を超えるという実験結果が示されてきた。この現象は、もちろんエネルギーの保存則を満たさない現象であるということではなく、その後にも多くの論文でこの実験結果のトレースが行われている。また、1990 年には Munt[1]により、この現象の理論的な裏付けが示された論文が発表された（[1]の最初の投稿は 1970 年代後半である）。

そこで、われわれは、ここで生じている 1.0 を超える反射率をシミュレーションで再現し、その結果を Munt による理論解や実験結果の文献と比較することを目的として、当社で開発した音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise によりダクト開口端反射率のシミュレーションを行った。

また、われわれは本事例を連成計算のひとつの事例としても位置付けている。本解析では、まず、流れ場を Goertler の式[2]（フランジを持つダクト端からの噴流）により近似的に与え、その定常流れ場での音響解析を実施した。その次に、流体音響の連成解析として、当社で開発した高速流体を対象とした圧縮性流れ解析のソフトウェア Advane/FrontFlow/FOCUS により得られた流れ場を用いて音響解析を実施した。

本稿では、本解析の理論的な背景と利用した解析手法・解析結果を示すことにより、われわれの取り組みを紹介する。ここでは、定性的に妥当な結果を得られた。ただし、定量的には Munt らの結果を十分に再現していないため、検証を継続している。本稿では、第 1 報という位置付けで報告する。

Key word: 音響解析、連成解析、流体解析、反射率、開口端、ダクト、高速流、噴流

1. はじめに

基本的な音響解析は線形問題であるため古くから解析的な研究が行われ、比較的単純な場においては特殊関数等を利用した解析解を求めることができることが分かっている。例えば、文献[3]には外部問題に関する解析解、内部問題に関する

解析解、ダクト内の解析解等につき、特殊関数を利用した表現、その解を求める方法がまとめられている。しかし、温度が不均一である場、または、流れがある場での音響解析は、その解を解析解で求めることが困難であるか、または不可能である。このような場合には、類似の条件における解析解で近似するか、有限要素法や境界要素法を利用したシミュレーションが行われることが多い。

そのような研究のひとつとして、K.M.Munt による文献[1]には、亜音速におけるダクト出口の反射率等に関する解析解と実験結果との比較に関する研究結果が述べられている。文献[1]によると

*アドバンスソフト株式会社 第 1 事業部

1st Computational Science and Engineering
Group, AdvanceSoft Corporation

**アドバンスソフト株式会社 第 2 事業部

2nd Computational Science and Engineering
Group, AdvanceSoft Corporation

1960年代半ばから行われた実験において、高速な流れが排出されるダクトの開放端で、その音響反射率が1.0を超える結果が示されてきた。この現象は1965年に初めて知られるようになり、その実験の再現および理論的な裏付けが1970年代に行われた。もちろん、この奇妙な現象はエネルギーの保存則を満たしていないわけではなく、理論的には妥当であることが同時期に示されている。これらの研究をさらに進めた文献[2]において Munt は、かなりの状況をシンプルにした上で、高速流れのある場での解析解を導出しており、比較的音速の低く低周波数の解析ケースにおいて反射率が1.0を超えることを理論的に示した。

一方、われわれは有限要素法による音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise を2005年から開発してきた。その開発において、音響の理論的な背景は[4]をベースにした部分が多い。開発当初では、小規模な問題を対象としたソルバのみのソフトウェアであったが、現在では、このシミュレーションプログラムも四面体4億要素を取り扱うことのできる Ver.4.2 まで発展させてきた。また、2013年6月には、本シミュレーションプログラムのプリポストとして、Advance/REVOCAP もリリースすることができた。当社が開発したそれらシミュレーションプログラムの概要については [5], [6], [7], [8], [9] を参照していただきたい。

このような背景のもと、2013年6月に鳥取大学大学院工学研究科 西村正治教授により Munt の論文[1]の紹介を受けた。そこで、われわれはシミュレーションで文献[1]の結果が再現できることをシミュレーションすることは今後の応用に有用と位置付けた。この分野は、実験もかなり困難になることから、シミュレーションが非常に有効になってくるからである。また、この結果により、多様な分野でのシミュレーションソフトウェアの有用性を示すことができると考えた。

2. 反射率の考え方

2.1. 流れがない場合の開口端反射率

ダクトの入口から出口に伝播した音は、開口端で外部に放射されるとともに、ダクト内部に音を反射させる。文献[4]より、開口端に無限バツフル

がある場合の開口端の放射インピーダンスは、下記の式で与えることができる。開口端の放射インピーダンス z (比音響インピーダンスで記述) は、

$$z = \theta_r + i\chi_r = 1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} + i \frac{H_1(2ka)}{ka} \quad (1)$$

である。ここで、 $J_m(\cdot)$ と $H_m(\cdot)$ をベッセル関数、シュトルーベ関数である。また、ここで、 a はダクトの半径である。 $ka < 0.6$ では、

$$\theta_r \approx \frac{1}{2}(ka)^2 \quad (2)$$

$$\chi_r \approx \frac{8}{3\pi}ka \quad (3)$$

と近似できるが、本計算では、4000Hz まで確認したいため、次の級数を利用した。ここでは、それぞれの特殊関数の級数展開の30項までの和を利用し、その4000Hzでの誤差は、 $1e-8$ 以下であることを確認した。

$$\theta_r = \sum_{n=1,\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+1)!} (ka)^{2n} \quad (4)$$

$$\chi_r = \sum_{n=1,\infty} \frac{(-1)^n 2^{4n+6} (n+1)! (n+2)!}{(2n+2)! (2n+4)! \pi} (ka)^{2n+1} \quad (5)$$

放射インピーダンスの値を、次のグラフに示す。それぞれ、横軸は ka 、および、ダクト半径が25mmの場合の周波数とした2枚のグラフを示す。

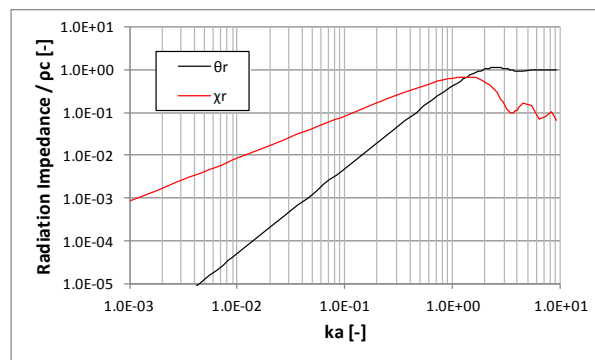


図1 開放端放射インピーダンス (横軸が ka)

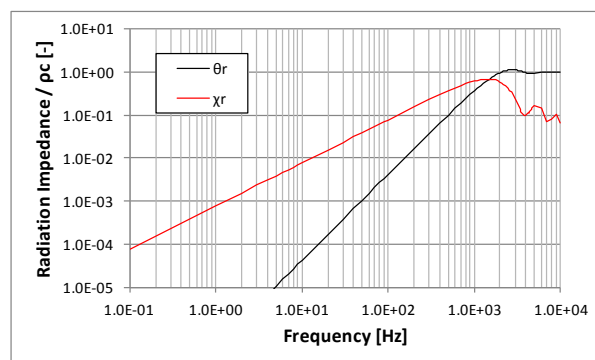


図2 開放端放射インピーダンス (横軸周波数)

次に、放射インピーダンス z を利用して、開口端反射率 R は、

$$R = \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \quad (6)$$

として求めることができる。以下の資料では、解析結果から計算された開放端反射率と、上記の開放端反射率と比較することを目指すために実施した。

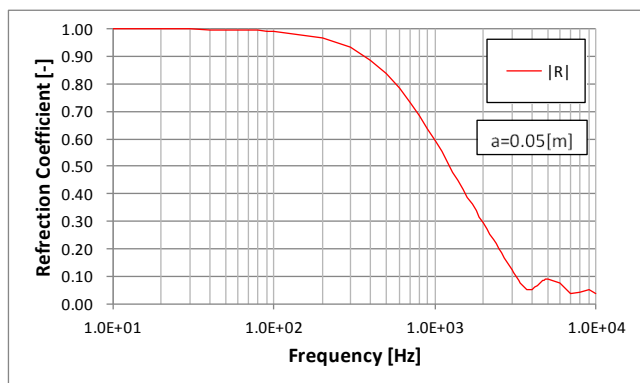


図 3 開放端での反射率（横軸は対数目盛）

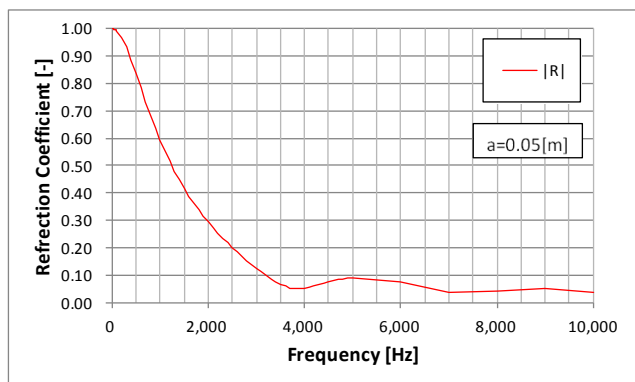


図 4 開放端での反射率（横軸は線形目盛）

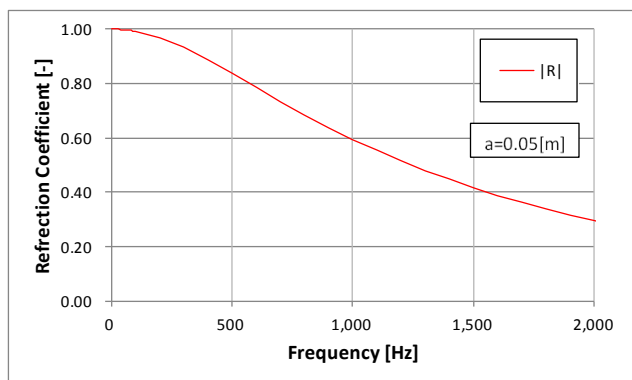


図 5 開放端での反射率（本資料の比較部分）

2.2. 反射率の求め方

本解析においては、反射率の計算を 2 マイクロ

フォン法で計算を行う。ここでは、まず、 x_1 から x_2 への伝達関数を H_{12} として、

$$H_{12} = \frac{p_2}{p_1} \quad (7)$$

を求める。

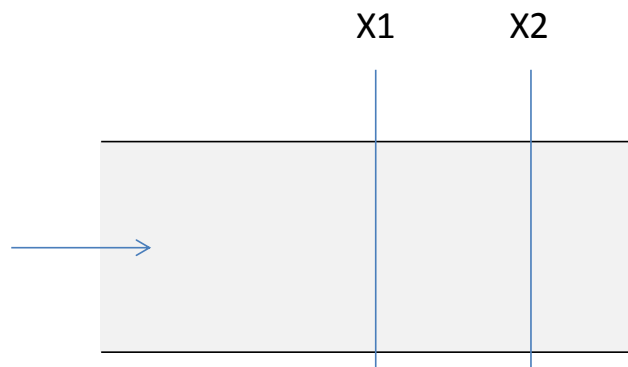


図 6 2 マイクロフォン法での反射率計算

また、右進行波および左進行波は

$$H_{12r} = \frac{p_{2r}}{p_{1r}} = \exp\left(\frac{\gamma}{1+M}S\right) \quad (8)$$

$$H_{12l} = \frac{p_{2l}}{p_{1l}} = \exp\left(-\frac{\gamma}{1-M}S\right) \quad (9)$$

$$S = |x_1 - x_2| \quad (10)$$

として求めることができる。これを用いて、反射率 R は、

$$R = -\frac{H_{12} - H_{12r}}{H_{12} - H_{12l}} \quad (11)$$

として求めることができる。

次に、1次元の基礎式で流れがある場合の解を用いた反射率の導出に関する確認をする。

$$(1 - M_x^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2ikM_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + k^2 \phi = 0 \quad (12)$$

$$\phi = \exp\left(\frac{ikx}{1+M}\right) : \text{進行波} \quad (13)$$

$$\phi = \exp\left(-\frac{ikx}{1-M}\right) : \text{後退波} \quad (14)$$

この 2 つは、簡単な計算をすることで、音響方程式の解になることが確認できる。この解の形を利用して反射率を求める方法について示す。この 2 つの解を利用して、一般的な音響方程式の解はその線形結合となり、

$$\phi = A \exp\left(\frac{ikx}{1+M}\right) + B \exp\left(-\frac{ikx}{1-M}\right) \quad (15)$$

である。この係数を利用すると反射率は、

$$R = \frac{B \exp\left(-\frac{ikx}{1-M}\right)}{A \exp\left(\frac{ikx}{1+M}\right)} \quad (16)$$

である。ここで利用する記号を念のため、下図に示す。

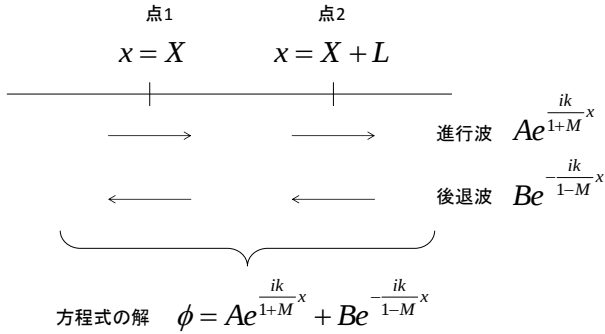


図 7 反射率を求めるために利用する事項

まず、距離 L だけ離れた点 1 と点 2 において、音響速度ポテンシャル ϕ_1 と ϕ_2 を求めることができたとする。この 2 つの値を利用して反射率を求めることを考える。それぞれの点で満たす式は

$$\phi_1 = A \exp\left(\frac{ikX}{1+M}\right) + B \exp\left(-\frac{ikX}{1-M}\right) \quad (17)$$

$$\phi_2 = A \exp\left(\frac{ik(X+L)}{1+M}\right) + B \exp\left(-\frac{ik(X+L)}{1-M}\right) \quad (18)$$

である。これから A と B を求めればよい。

$$\begin{pmatrix} \exp\left(\frac{ikX}{1+M}\right) & \exp\left(-\frac{ikX}{1-M}\right) \\ \exp\left(\frac{ik(X+L)}{1+M}\right) & \exp\left(-\frac{ik(X+L)}{1-M}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

であるから

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\exp\left(-\frac{ikL}{1-M}\right) - \exp\left(\frac{ikL}{1+M}\right)} \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{ik(X+L)}{1-M}\right) - \exp\left(-\frac{ikX}{1-M}\right) \\ -\exp\left(\frac{ik(X+L)}{1+M}\right) \exp\left(\frac{ikX}{1+M}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= \frac{-\phi_1 \exp\left(\frac{ik(X+L)}{1+M}\right) + \phi_2 \exp\left(\frac{ikX}{1+M}\right)}{\phi_1 \exp\left(-\frac{ik(X+L)}{1-M}\right) - \phi_2 \exp\left(-\frac{ikX}{1-M}\right)} \\ &= \frac{\exp\left(\frac{ikX}{1+M}\right) \left\{ -\exp\left(\frac{ikL}{1+M}\right) + \frac{\phi_2}{\phi_1} \right\}}{\exp\left(-\frac{ikX}{1-M}\right) \left\{ \exp\left(-\frac{ikL}{1-M}\right) - \frac{\phi_2}{\phi_1} \right\}} \end{aligned} \quad (21)$$

となり、

$$\begin{aligned} R &= \frac{B \exp\left(-\frac{ikX}{1-M}\right)}{A \exp\left(\frac{ikX}{1+M}\right)} = \frac{-\frac{\phi_2}{\phi_1} + \exp\left(\frac{ikL}{1+M}\right)}{\frac{\phi_2}{\phi_1} - \exp\left(-\frac{ikL}{1-M}\right)} \\ &= -\frac{H'_{12} - \exp\left(\frac{ikL}{1+M}\right)}{H'_{12} - \exp\left(-\frac{ikL}{1-M}\right)} \end{aligned} \quad (22)$$

すなわち、

$$R = -\frac{H'_{12} - \exp\left(\frac{ikL}{1+M}\right)}{H'_{12} - \exp\left(-\frac{ikL}{1-M}\right)} \quad (23)$$

となる。ここで、

$$H_{12} = \frac{p_2}{p_1} \quad (24)$$

ではなく、

$$H'_{12} = \frac{\phi_2}{\phi_1} \quad (25)$$

とした理由は、前者が圧力から求める比であることに對し、後者は音響速度ポテンシャルから求める式であるという理由からである。音圧を用いても反射率を計算できるが、ここでは音圧ではなくプログラムで直接求めることができる音響速度ポテンシャルを用いても反射率は計算できることを確認した (Advance/FrontNoise は音響速度ポテンシャルを解いている)。この表現は、プログラム開発者にとっては手順が少なくなることを確認しやすい利点がある。

2.3. 音圧を利用した反射率の定式化

先に述べたように、方程式の基本解は、

$$\phi = \exp\left(\frac{ikx}{1+M}\right), \quad \phi = \exp\left(-\frac{ikx}{1-M}\right) \quad (26)$$

である。一方、音圧は、

$$p(x) = \rho(i\omega\phi(x) - v_0 \cdot \nabla\phi(x)) \quad (27)$$

すなわち、

$$p = i\rho\omega\phi - \rho v \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (28)$$

である。流れがない場合には、

$$H_{12} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{\phi_2}{\phi_1} \quad (29)$$

とすることができる。しかし、流れ場のある場合には、

$$H_{12} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{i\rho\omega\phi_2 - \rho v \frac{\partial\phi_2}{\partial x}}{i\rho\omega\phi_1 - \rho v \frac{\partial\phi_1}{\partial x}} \quad (30)$$

である。これは、 $H'_{12} = \phi_2 / \phi_1$ に等しいかどうかは、すぐに分かることではない。以下では、これが正しいかどうかを確認するため、音圧から反射率を求める式を導いてみる。基本に立ち戻って、

$$\phi_F = \exp\left(\frac{ikx}{1+M}\right) : \text{進行波} \quad (31)$$

$$\phi_R = \exp\left(-\frac{ikx}{1-M}\right) : \text{後退波} \quad (32)$$

から、音圧 $p = i\rho\omega\phi - \rho v \frac{\partial\phi}{\partial x}$ に変換すると、

$$\begin{aligned} p_F &= i\rho\omega\exp\left(\frac{ikx}{1+M}\right) - \rho v \frac{ik}{1+M} \exp\left(\frac{ikx}{1+M}\right) \\ &= i\rho\omega\exp\left(\frac{ikx}{1+M}\right) - \rho M \frac{i\omega}{1+M} \exp\left(\frac{ikx}{1+M}\right) \\ &= i\rho\omega \frac{1}{1+M} \exp\left(\frac{ikx}{1+M}\right) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} p_R &= i\rho\omega\exp\left(-\frac{ikx}{1-M}\right) + \rho v \frac{ik}{1-M} \exp\left(-\frac{ikx}{1-M}\right) \\ &= i\rho\omega\exp\left(-\frac{ikx}{1-M}\right) + \rho M \frac{i\omega}{1-M} \exp\left(-\frac{ikx}{1-M}\right) \\ &= i\rho\omega \frac{1}{1-M} \exp\left(-\frac{ikx}{1-M}\right) \end{aligned} \quad (34)$$

となる。まとめると、音圧については、

$$p_F = i\rho\omega \frac{1}{1+M} \exp\left(\frac{ikx}{1+M}\right) : \text{進行波} \quad (35)$$

$$p_R = i\rho\omega \frac{1}{1-M} \exp\left(-\frac{ikx}{1-M}\right) : \text{後退波} \quad (36)$$

である。これを用いて、その係数 A と B

$$\begin{aligned} p_1 &= Ai\rho\omega \frac{1}{1+M} \exp\left(\frac{ikX}{1+M}\right) \\ &+ Bi\rho\omega \frac{1}{1-M} \exp\left(-\frac{ikX}{1-M}\right) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} p_2 &= Ai\rho\omega \frac{1}{1+M} \exp\left(\frac{ik(X+L)}{1+M}\right) \\ &+ Bi\rho\omega \frac{1}{1-M} \exp\left(-\frac{ik(X+L)}{1-M}\right) \end{aligned} \quad (38)$$

を求める。同様の計算で、

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= \frac{-p_1 i\rho\omega \frac{1}{1+M} \exp\left(\frac{ik(X+L)}{1+M}\right) + p_2 i\rho\omega \frac{1}{1+M} \exp\left(\frac{ikX}{1+M}\right)}{p_1 i\rho\omega \frac{1}{1-M} \exp\left(-\frac{ik(X+L)}{1-M}\right) - p_2 i\rho\omega \frac{1}{1-M} \exp\left(-\frac{ikX}{1-M}\right)} \\ &= \frac{i\rho\omega \frac{1}{1+M} \exp\left(\frac{ikX}{1+M}\right) \left\{ -p_1 \exp\left(\frac{ikL}{1+M}\right) + p_2 \right\}}{i\rho\omega \frac{1}{1-M} \exp\left(-\frac{ikX}{1-M}\right) \left\{ p_1 \exp\left(-\frac{ikL}{1-M}\right) - p_2 \right\}} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} &\frac{Bi\rho\omega \frac{1}{1-M} \exp\left(-\frac{ikX}{1-M}\right)}{Ai\rho\omega \frac{1}{1+M} \exp\left(\frac{ikX}{1+M}\right)} \\ &= \frac{-\exp\left(\frac{ikL}{1+M}\right) + \frac{p_2}{p_1}}{\exp\left(-\frac{ikL}{1-M}\right) - \frac{p_2}{p_1}} = -\frac{\frac{p_2}{p_1} - \exp\left(\frac{ikL}{1+M}\right)}{\frac{p_2}{p_1} - \exp\left(-\frac{ikL}{1-M}\right)} \end{aligned} \quad (40)$$

従って、ここまでをまとめると、

$$R = -\frac{H_{12} - \exp\left(\frac{ikL}{1+M}\right)}{H_{12} - \exp\left(-\frac{ikL}{1-M}\right)} \quad (41)$$

となる。従って、音圧でも同様の式で反射率が計算可能である。

2.4. 開口端インピーダンスの確認

2.4.1. 解析形状

開口端に無限バッフルがある場合の開口端インピーダンスの確認を行うため、単純なダクトで出口インピーダンスを与えた解析対象での反射率のチェック計算を行った。ひとは、 ρc 境界を与えると反射率が0になることを確認する。ふたつめは、(1)式で放射インピーダンスを与えると、(6)式の反射率になることが期待できる。ここでは、2マイクロフォンの配置については、候補点を開口端から、1mm 間隔で6点を設け、その隣合う点を2マイクロフォンとして、5つの組み合わせで反射率を算出した。ここでは、2マイクロフォン方の算出方法のチェックとしての意味もある。

表 1 反射率の2マイクロフォンの算出位置

番号	1	2	3	4	5
位置	A-B	B-C	C-D	D-E	E-F

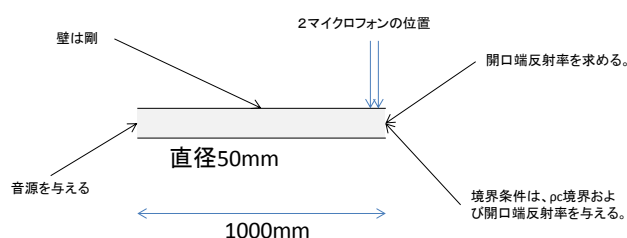


図 8 反射率計算チェックにおける解析対象

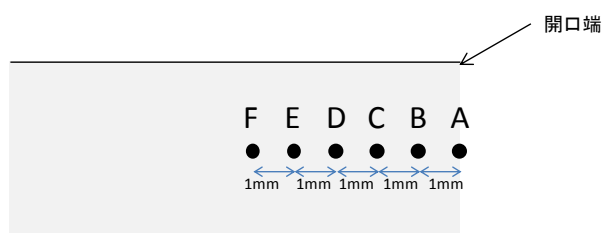


図 9 開口端の2マイクロフォンの位置

2.4.2. 解析結果

解析結果として、 ρc 境界では反射率0となり、放射インピーダンスを与えると図5と全く同じ結果となることを確認した。それぞれの結果を図10と11に示す。この結果は定量的にも妥当な結果である。また、2マイクとフォン法による手法の

妥当性も示している。

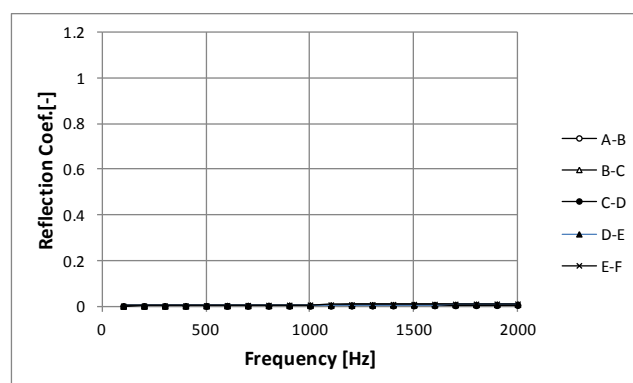


図 10 ρc 境界での反射率

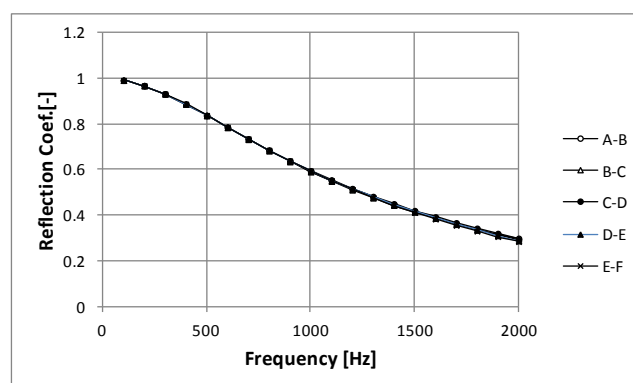


図 11 放射境界での反射率

2.5. 速度を含む音響解析の基礎方程式

本解析では、速度を含む音響の基礎方程式を解く。当然その式は、速度なしの場合の拡張となっている。具体的には、文献[10]の1.2節、5.2節等、および文献[11]の11.1節の定式化に基づく。また、速度ありの基礎方程式の離散化については、広く利用されている有限要素法を利用して計算を行う。これらの文献で述べられている速度を含んだ音響解析の基礎方程式 convected wave equation は、

$$V(x,t) = \text{grad}(\Psi(x,t)) \quad (42)$$

を用いた形に変形すると

$$\frac{D_0}{Dt} \left(\frac{\rho}{c^2} \frac{D_0 \Psi}{Dt} \right) - \nabla \cdot (\rho \nabla \Psi) = 0 \quad (43)$$

である。ここで、 Ψ は音響速度ポテンシャル、 ρ 、 c 、および v_0 は、密度、音速、局所的な媒体の流速である。また、

$$\frac{D_0}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla \quad (44)$$

である。これを、周波数領域で解く。この場合には、

$$\Psi(x, t) = \sum_{\nu=1, \infty} \phi(x) e^{-i\omega t} \quad (45)$$

を仮定している。ここで、 $\omega = 2\pi\nu$ である。この表現を利用して、音圧は、

$$P(x, t) = -\rho \frac{D\Psi(x, t)}{Dt} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \sum_{\nu=1, \infty} p(x) e^{-i\omega t} \\ &= -\rho \frac{D}{Dt} \left(\sum_{\nu=1, \infty} \phi(x) e^{-i\omega t} \right) \\ &= -\rho \sum_{\nu=1, \infty} (-i\omega \phi + v_0 \cdot \nabla \phi) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (47)$$

$$p(x) = -\rho(-i\omega \phi(x) + v_0 \cdot \nabla \phi(x)) \quad (48)$$

となる。音響速度ポテンシャルを書き換える。

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \Phi(t, x) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + Mc \cdot \nabla \right) \phi(x) e^{-i\omega t} \\ &= \{-i\omega \phi(x) + Mc \cdot \nabla \phi(x)\} e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (49)$$

また、

$$\nabla \cdot \rho \nabla \Phi(t, x) = \rho \nabla \cdot \nabla \phi(x) e^{-i\omega t} \quad (50)$$

である。以下の記述では、

$$M \cdot \nabla = M_x \frac{\partial}{\partial x} + M_y \frac{\partial}{\partial y} + M_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (51)$$

であり、

$$\begin{aligned} (M \cdot \nabla)^2 &= \left(M_x \frac{\partial}{\partial x} + M_y \frac{\partial}{\partial y} + M_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &\quad \left(M_x \frac{\partial}{\partial x} + M_y \frac{\partial}{\partial y} + M_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= M_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + M_y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + M_z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &\quad + 2M_x M_y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2M_y M_z \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + 2M_z M_x \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \end{aligned} \quad (52)$$

である。これを用いて、

$$\begin{aligned} &\frac{D}{Dt} \left(\frac{\rho}{c^2} \frac{D}{Dt} \Phi(t, x) \right) \\ &= \frac{D}{Dt} \left(\frac{\rho}{c^2} \{-i\omega \phi(x) + Mc \cdot \nabla \phi(x)\} e^{-i\omega t} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + Mc \cdot \nabla \right) \\ &\quad \left(\frac{\rho}{c^2} \{-i\omega \phi(x) + Mc \cdot \nabla \phi(x)\} e^{-i\omega t} \right) \end{aligned} \quad (53)$$

さらに

$$\begin{aligned} &= -i\omega \frac{\rho}{c^2} \{-i\omega \phi(x) + Mc \cdot \nabla \phi(x)\} e^{-i\omega t} \\ &\quad + \frac{\rho}{c^2} Mc \cdot \nabla \{-i\omega \phi(x) + Mc \cdot \nabla \phi(x)\} e^{-i\omega t} \\ &= \left(-\frac{\rho}{c^2} \omega^2 \phi(x) - i\omega \frac{\rho}{c^2} Mc \cdot \nabla \phi(x) \right) e^{-i\omega t} \\ &\quad + \left(-i\omega \frac{\rho}{c^2} Mc \cdot \nabla \phi(x) + \frac{\rho}{c^2} (Mc \cdot \nabla)^2 \phi(x) \right) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (54)$$

となり、

$$\begin{aligned} &= \left(-\frac{\rho}{c^2} \omega^2 \phi(x) - 2i\omega \frac{\rho}{c^2} Mc \cdot \nabla \phi(x) \right) e^{-i\omega t} \\ &\quad + \frac{\rho}{c^2} (Mc \cdot \nabla)^2 \phi(x) \\ &= \rho e^{-i\omega t} \left(-\frac{\omega^2}{c^2} \phi(x) - 2i \frac{\omega}{c} M \cdot \nabla \phi(x) \right. \\ &\quad \left. + (M \cdot \nabla)^2 \phi(x) \right) \end{aligned} \quad (55)$$

と整理できる。さらに、

$$\begin{aligned} &\rho e^{-i\omega t} \left(-\frac{\omega^2}{c^2} \phi(x) - 2i \frac{\omega}{c} M \cdot \nabla \phi(x) + (M \cdot \nabla)^2 \phi(x) \right) \\ &- \rho \nabla \cdot \nabla \phi(x) e^{-i\omega t} = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

である。従って、最終的に、周波数領域での音響方程式は、

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \nabla \phi(x) - (M \cdot \nabla)^2 \phi(x) \\ &+ 2ikM \cdot \nabla \phi(x) + k^2 \phi(x) = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (58)$$

と書くことができる。これを書き下すと

$$(M \cdot \nabla)^2 = M_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + M_y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + M_z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2M_x M_y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2M_y M_z \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + 2M_z M_x \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \quad (59)$$

であり、具体的に、周波数領域の基礎方程式を書き下すと、

$$\begin{aligned} & \left(1 - M_x^2\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \left(1 - M_y^2\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left(1 - M_z^2\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ & - \left(2M_x M_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + 2M_y M_z \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} + 2M_z M_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} \right) \\ & + 2ik \left(M_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + M_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + M_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + k^2 \phi = 0 \end{aligned} \quad (60)$$

となる。ここで、

$$M_x = \frac{u}{c}, \quad M_y = \frac{v}{c}, \quad M_z = \frac{w}{c} \quad (61)$$

とした。確認のため、速度なしの式は、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + k^2 \phi = 0 \quad (62)$$

である。(60)式からは、 M_x 、 M_y 、 M_z が1と比較して小さければ、速度の効果は小さいことが分かる。

3. 解析形状および解析条件

3.1. 概要

計算目的は、開口端付近の流速分布によって、開口端反射率の周波数依存性を求めることである。本節では、流れを伴うダクトの開口端反射率を計算するための条件について示す。

ここでは、周波数ダクト $f=0 \sim 2\text{kHz}$ において、ダクトの直径は 50mm で、ダクト内の平均マッハ数は $0 \sim 0.4$ の条件で、解析結果から音圧開口端反射率(反射音圧/入射音圧)を計算する。ダクト内外とも、流体計算領域であり、音響計算領域である。ダクト出口からの外部遠方で ρc 境界とする。具体的にはダクトの出口から、音響的に大き

な球を解析領域とする。その球の外側境界を ρc 境界とする。流れ場は、Goertler の式に従って、または、圧縮性の定常流れで解いて求める。その結果を利用して、解析領域での各節点での局所時間平均流速ベクトルを音響解析の場に張り込むという手順で計算する。圧縮性の定常流れの解析においては、ダクト内の壁での境界層や、開口部での複雑な流れがある程度模擬できる程度のメッシュサイズとする。また、音響伝播の媒体は常温の空気とする。

3.2. 解析対象

音響解析の解析形状および解析条件について述べる。音の伝播する媒体は空気を想定しており、その物性値は、表の通りとする。ダクトの入り口では一定の音圧を与える。本資料では、球表面の放射条件等に関して[4]を参照している。

表 2 媒体の物性

空気層	実部	虚部
音速[m/s]	344.00	0.00
密度[kg/m ³]	1.20	0.00

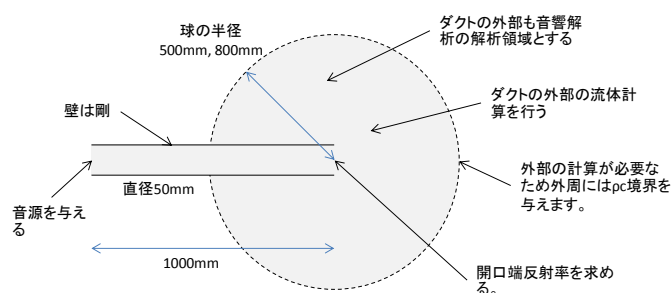


図 12 解析形状

3.3. 解析条件

ここで対象としたケースは、

- ・ ケース 1 : Goertler の式
- ・ ケース 2 : 圧縮性流体解析ソフトの流速を利用したケース

である。本稿は、この2ケースに関する結果を報告する。いずれも形状およびメッシュは同一のデータを利用している。

表 3 ケース一覧

ケース名	流れ場
ケース 1	Goertler の式
ケース 2	圧縮性流体結果

また、反射率については、計算から得られた音圧をもとにして、2 マイクロフォン法から求める。マイクロフォンの位置は、ダクト先端の流れの状態が影響せず、平面波での近似が成立する開口端から 50mm および開口端から 90mm の位置の 2 点を採用した。

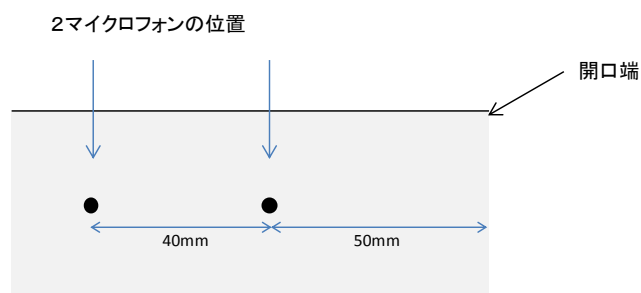


図 13 開口端の 2 マイクロフォンの位置

3.4. 流れ場に Goertler の式を適用

3次元円形自由噴流の速度分布に Goertler の式を利用する。利用する式は、ダクト出口の座標を $x=0$ として

$$u = \frac{3K}{(8\pi\varepsilon_0(x-x_0))(1+\eta^2/4)^2} \quad (63)$$

$$v = \frac{3K}{16\pi(x-x_0)^2}(\eta - \eta^2/4)(1+\eta^2/4)^{-2} \quad (64)$$

となる。ここで、 x_0 は仮想原点の位置であり、この決定方法については、後に述べる。また、ここで

$$K = 2\pi \int_0^\infty u^2 y dy \quad (65)$$

$$\eta = \left(\frac{3K}{16\pi\varepsilon_0^2} \right)^{1/2} \left(\frac{y}{x-x_0} \right) \quad (66)$$

$$\varepsilon_0 = 0.0161K^{1/2} \quad (67)$$

である。ここまで示した式は、参考文献[2]の p.30,p.31 にある式において、 x 座標を仮想原点分だけシフトした式であり、そのシフト以外の項はまったく同じ記述をしている。また、この(67)式において、 ε_0 の式を利用した場合には、(66)式で定義される η は K に依存しなくなることに注意する。[2]の図 3-10 をもとに、今回利用する噴流の流れのモデルを図示する。

仮想原点は次のように決める。(64)式から、 $\eta=4$ が噴流外縁となっている。ダクト内では、層流となっているとする。ダクト内の壁近傍では流速 0 であり、それが噴流外縁とつながっているものとして仮想原点を決定した。すなわち、ダクトの半径の位置 $y=0.025$ において、 $\eta=4$ となるように仮想原点を決めた。具体的には次の手順である。まず、(66)式に(67)式を代入すると、

$$\eta = \left(\frac{3}{16\pi(0.0161)^2} \right)^{1/2} \left(\frac{y}{x-x_0} \right) \quad (68)$$

である。 $x=0$ 、 $y=0.025$ において、 $\eta=4$ であるため、

$$4 = \left(\frac{3}{16\pi(0.0161)^2} \right)^{1/2} \left(\frac{0.025}{0-x_0} \right) \quad (69)$$

として仮想原点の位置を決める。従って、

$$x_0 = -0.09484 \quad (70)$$

となる。さきほど述べたように η は K に依存しないため、この仮想原点の位置は流速に依存せず、これで流れ場を決定する。

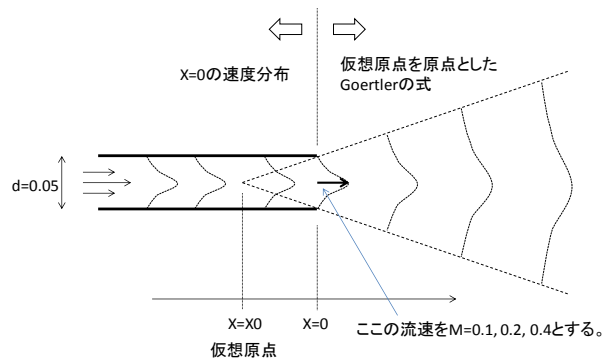


図 14 Goertler の式の利用方法

音響計算の流れ場において与えるマッハ数を、ダクト出口の中心の流速と定義すると、 $x=0$ および $y=0$ における流速が、

$$u = Mc \quad (71)$$

とすることができるため、この流速から K を決めることができる。具体的には、

$$Mc = \frac{3K}{(8\pi 0.0161K^{1/2}(0-x_0))(1+0^2/4)^2} \quad (72)$$

を、各マッハ数に対して K を解けばいい。ここで、 $\varepsilon_0 = 0.0161K^{1/2}$ を使っていることに注意する。これを解くと、次のような対応となる。ここで、音速は、

$$c = 343[m/sec] \quad (73)$$

としている。

表 4 各流速の条件に対する
 K の値と仮想原点の位置

マッハ数	$K[m^4/sec^2]$	$x_0[m]$
0.1	0.19250	-0.09484
0.2	0.77001	-0.09484
0.4	3.08004	-0.09484

ここで算出した値に基づく、代表的な線分上での速度を下記に示す。それぞれプロットした位置は下記の通りである。ここでは、 $M=0.4$ のケースのみをプロットした。仮想原点が同じであるため、どのケースもこのグラフをスケーリングしたグラフとなる。

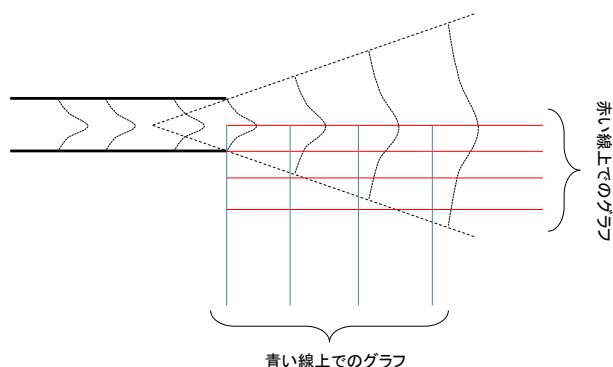


図 15 速度 u と v をプロットした位置

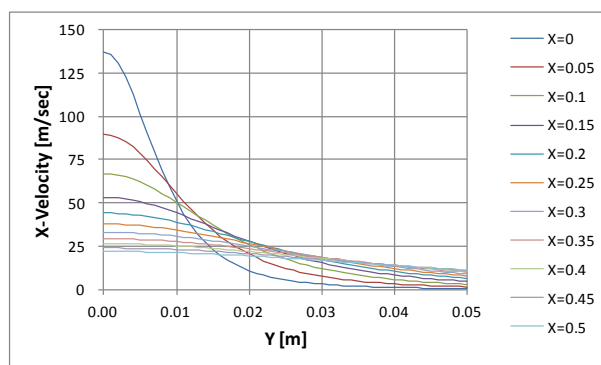


図 16 X 方向速度 u 分布 ($M=0.4$ のケース)

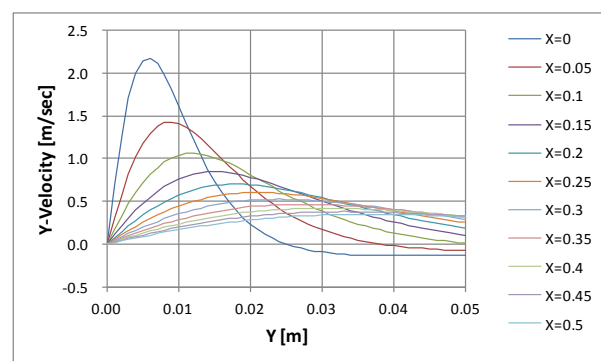


図 17 Y 方向速度 v 分布 ($M=0.4$ のケース)

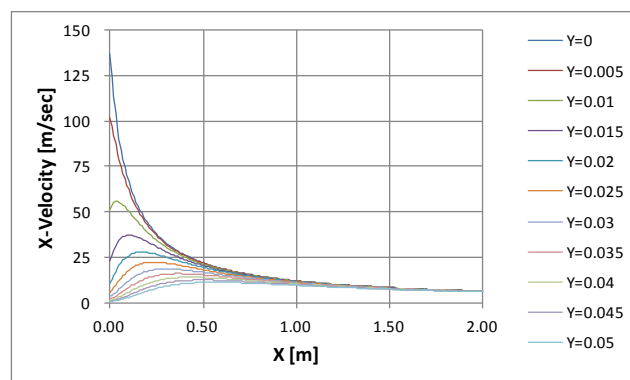


図 18 X 方向速度 u 分布 ($M=0.4$ のケース)

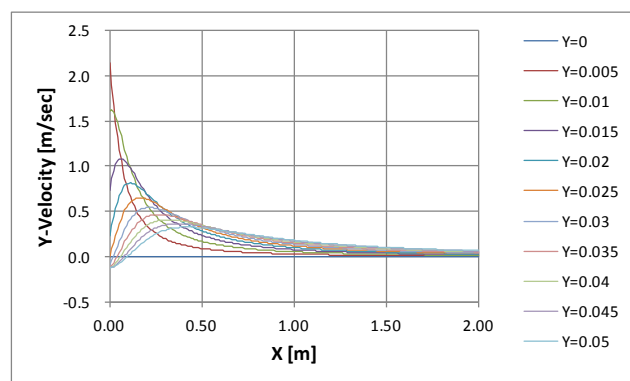


図 19 Y 方向速度 v 分布 ($M=0.4$ のケース)

4. 解析結果

4.1. 格子に設定した速度場

下記に示すようなメッシュを利用した。音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise では、形状適合性の高い四面体 1 次要素を採用しており、最大周波数のひとつの波長に 10 程度の節点が配置されるようなメッシュとした。また、結果の確認のため、メッシュサイズをほぼ半分にした解析も実施している。このメッシュの要素数および節点数は下記の通りである。

表 5 メッシュサイズ

項目	節点数	要素数
標準ケース	340,182	1,981,326
密なケース	2,652,455	15,450,608

このメッシュサイズは、特に密なケースの場合には、通常実施するシミュレーションと比較すると非常に大きなメッシュ数の解析となる。音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise はこの程度のメッシュサイズであれば、並列計算機を利用して比較的手軽に解析できる性能を備えている。従って、この程度のメッシュサイズは、通常の設計に利用できるレベルであると考えている。

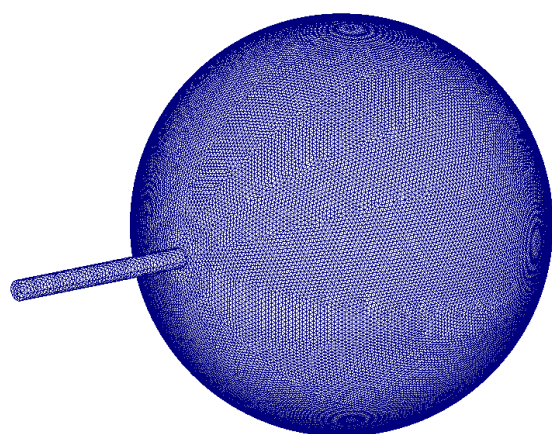


図 20 音響メッシュ図

次の、このメッシュにおいて、Goeltler の式を利用して、速度場を決定した。ダクト内の速度については、出口付近の流れ場を延長して設定している。Advance/FrontNoise においては、要素に

対して流れ場を与える。この図において、若干の色の不均一はメッシュの粗さに依存するが、精度に影響を与える程度ではないと考えている。

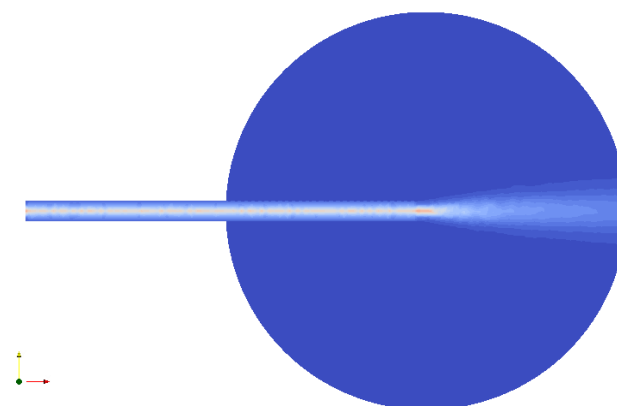


図 21 メッシュにマッピングした流れ場
(X 方向速度 u のコンタ、範囲 0~150m/sec)

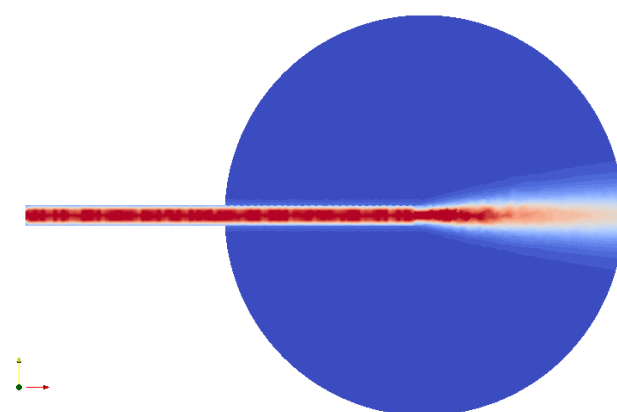


図 22 メッシュにマッピングした流れ場
(X 方向速度 u のコンタ、範囲 0~50m/sec)

4.2. 流れ場がない場合における解析結果

まず、流れのない場において、反射率の解析結果を確認した。ここで得られなければならない結果は、H.Levine ら[12]に示された開口端に無限バツフルのない場合の理論解である。ここでは、流れがない場合における解析結果が理論解とほぼ一致することを確認した。図 23 に示すように両者はよく一致している。従って、この結果から、メッシュおよび解析条件、および、2 マイクロフォン法による方法には問題がないことが確認できた。

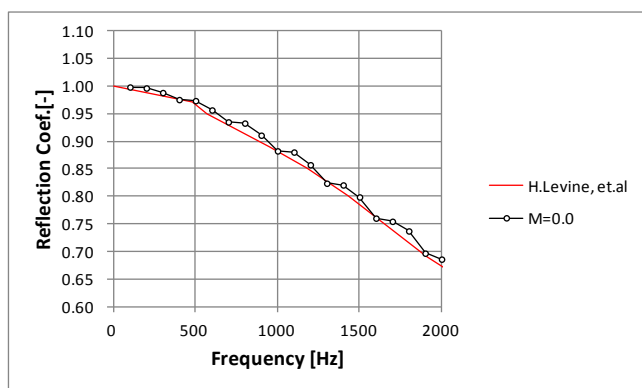


図 23 反射率の再現 (M=0.0)

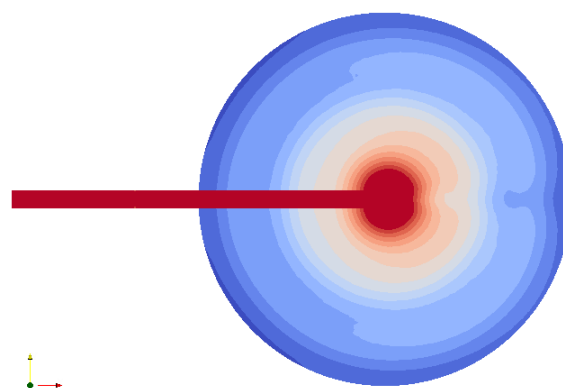


図 26 音圧レベルコンタ (M=0.4)

4.3. 流れ場がある場合における解析結果

次に流れ場がある場合における解析結果について述べる。マッハ数については、0.1、0.2、0.4のケースを実施した。まず、音圧レベルのコンタを示す。本稿では、以降に音圧レベルのコンタを示すが、いずれも、特定の周波数でのコンタであることをあらかじめ断わっておく。ここでは、特定の周波数とは 1kHz とした。なお音源には、ダクト入口（左端）の面全体に単位大きさの音圧の振動を与えている。

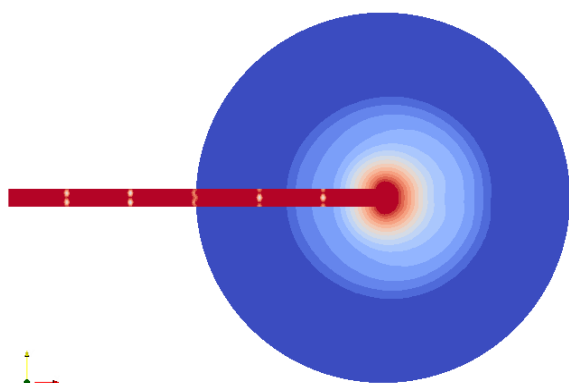


図 24 音圧レベルコンタ (M=0.1)

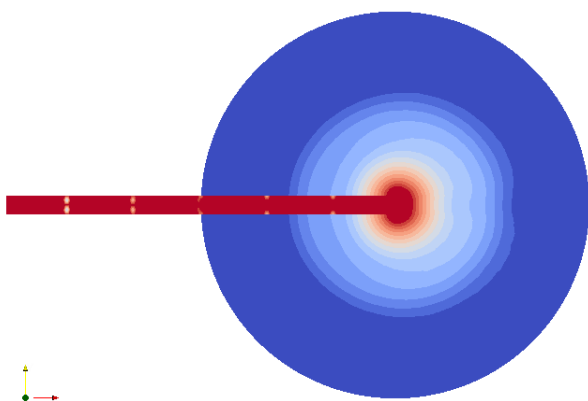


図 25 音圧レベルコンタ (M=0.2)

次に、それぞれのケースに対して、反射率を示す。ここでは、流れが速くなると開口端で 1.0 を超える反射率が計算できていることが確認できる。また、そのオーダーもほぼ Munt の文献と同程度である。低い周波数ではほぼ反射率が 1 になり、高周波では流れ場のない場合との反射率の差が小さくなることも定性的に一致している。

しかし、定量的には次の通りの差異がある。Munt の文献にある理論値、実験ともに、マッハ数が高くなると、反射率のピークが高周波側にずれている。しかし、本結果では、ピークが一定の周波数にある。今後、この原因について継続的に検討を進める。

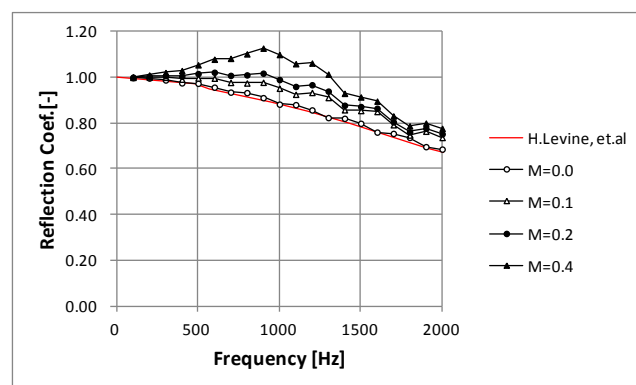


図 27 Goertler の式を利用した反射率

4.4. メッシュ数に問題ないことの確認

結果の差異については、いくつかの原因が考えられるが、その原因がメッシュ依存性ではないことを確認している。ここでは、結果の参考までに、M=0.4(Goertler の式)に対して、10 倍弱のメッシュ数にして、結果が変化ないことを確認した。こ

の結果から、メッシュ数についてはまったく問題ないことが分かる。本ケースでは、Goertler の式の速度を利用する部分からその分布を細分化している（メッシュ細分化の結果は正しい）。

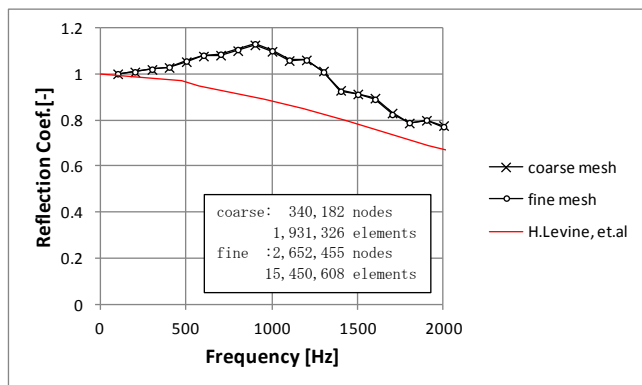


図 28 M=0.4(Goertler の式)のメッシュ依存性

4.5. 流体解析との連成（参考計算）

4.5.1. 目的

これまでに示した結果では、Goertler の式を利用した流れ場を与えたが、これを流体シミュレーションで得た結果で置き換えることができる。現実のモデルでは、流れ場があるモデル式で与えることは難しいケースが多く、実機の場合には流れのシミュレーションと音響シミュレーションを連成させることが重要になってくると考えている。本手法による解析評価は実施未完であるが、本稿では、すでにそのシミュレーションの仕組みがすでにあることを紹介するために、われわれの取り組みの一部を示すことにする。本解析では、immersed boundary 法による圧縮性の流れ解析コード Advance/FrontFlow/FOCUS を利用した。これは当社で販売している流れ解析ソフトウェアのうちのひとつである。本ソフトウェアの特長はメッシュ作成の工数が少ないことであるが、その機能については、[13]を参照のこと。

4.5.2. 解析条件

利用したソフトウェアは構造格子（メッシュ数は、 $50 \times 50 \times 100$ ）を利用した immersed boundary 法による圧縮性の流れ解析コード Advance/FrontFlow/FOCUS である。出口付近の

マッハ数が、 $M=0.1$ 、 0.2 、 0.4 の流れ解析を行った。この流れを音響メッシュに貼り付けた。

計算結果の表示では構造格子状となっているが、計算上は曲線の境界を模擬している。また計算で模擬しているダクトの厚みは図よりも薄い。図は、壁の存在するセルを表示していることになる。

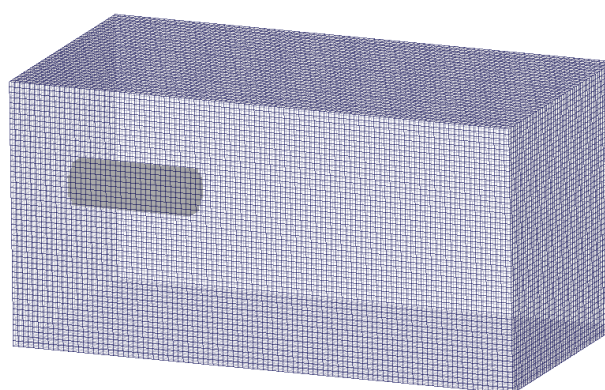


図 29 流体解析メッシュ（全体図、X 方向図）

4.5.3. 解析結果

十分に定常に達した流れの瞬時値を音響解析に利用した。ただし、本解析では、後流れの領域を十分に長くとっていないため、妥当な結果を得られていない可能性がある。



図 30 M=0.1 のケースの流れ場

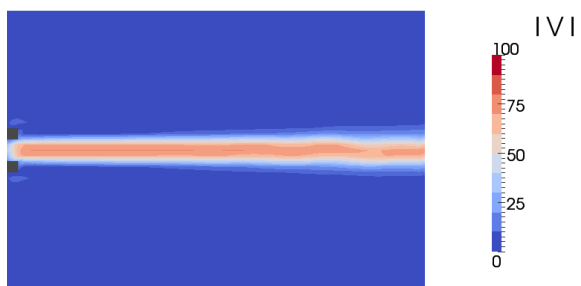


図 31 M=0.2 のケースの流れ場



図 32 M=0.4 のケースの流れ場

4.5.4. 音響解析結果

次に流れ場がある場合における解析結果について述べる。マッハ数については、0.1、0.2、0.4のケースを実施した。音圧レベルのコンタを示す。また、同様の手法を利用して本ケースにおける反射率を算出した。本結果については、あくまでも参考計算であり、定量的な結果については未検討であるが、反射率が1.0より大きい現象が再現されている。流体計算結果、および、音響解析結果の妥当性については、引き続き検討している。

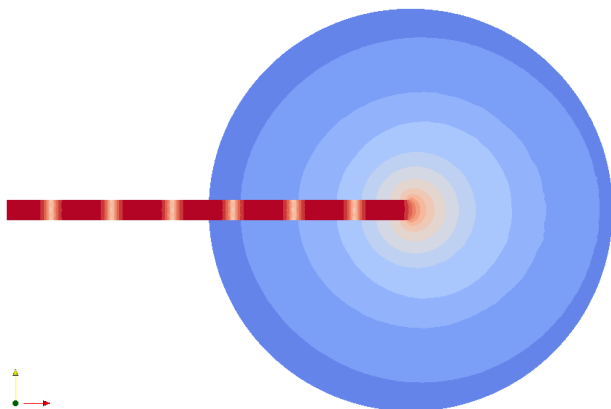


図 33 M=0.0 の音圧レベルコンタ

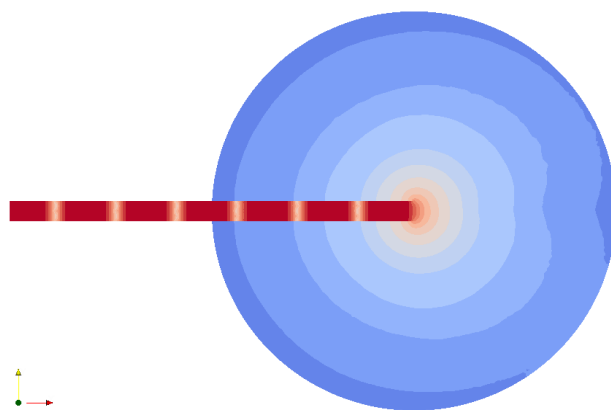


図 34 M=0.1 の音圧レベルコンタ

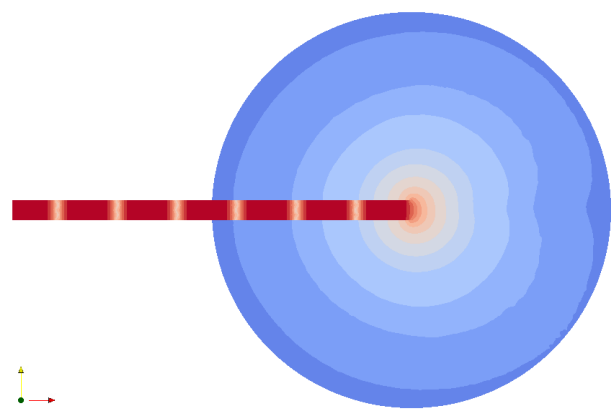


図 35 M=0.2 の音圧レベルコンタ

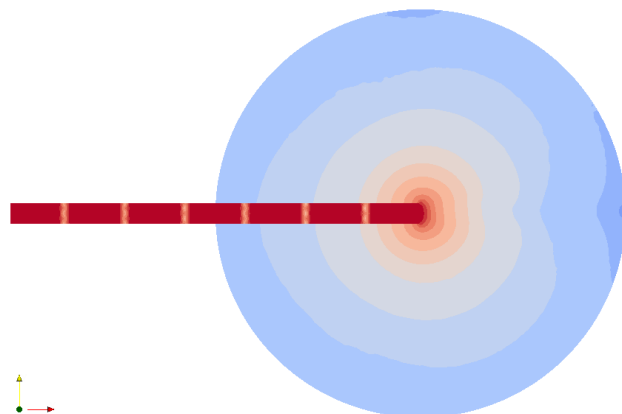


図 36 M=0.4 の音圧レベルコンタ

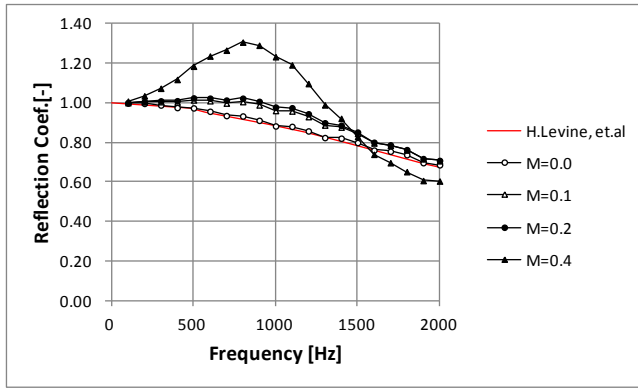


図 37 ケース 2 の反射率

5. まとめ

本解析は、1990 年に発表された Munt の論文において示された高速流れの場合におけるダクト開口端の反射率が 1.0 を超える現象を再現することを目的に実施した。本稿では、そのシミュレーションで利用する手法および理論的な背景について説明し、その一部の結果について示した。

ここでは、流れ場に Goertler の式を利用したケースを実施した。ここでは、反射率の解析結果は、Munt の論文と定性的な傾向は一致するものの、定量的にはまだ検討する余地のある結果が得られている。本稿は第 1 報であり、Goertler の流れを与えた場合の検証を引き続き実施している。

さらに、本手法には将来的に複雑な流れ場における流体音響解析を可能とするポテンシャルがあることを示すために、圧縮性流れのシミュレーションによる流れ場を利用した音響解析の結果についても紹介のために述べた。また、参考計算として示した流体解析と音響解析の連成計算は、比較的高速な計算機が利用できる現状においては手軽に実施できる。

以上のことから、本手法を発展させていくことで、処理・精度ともに十分に産業界の設計において利用可能なツールと成る可能性があると考えている。そのレベルまでわれわれのシミュレーションソフトウェアを進化させていく予定である。

6. 付録

6.1. 流れがある場合の無反射境界条件

1 次元の基礎式で流れがある場合の無反射境界

条件に関して確認する。

$$(1 - M_x^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2ikM_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + k^2 \phi = 0 \quad (74)$$

$$\phi = \exp\left(\frac{ikx}{1+M}\right) : \text{進行波} \quad (75)$$

$$\phi = \exp\left(-\frac{ikx}{1-M}\right) : \text{後退波} \quad (76)$$

この 2 つは、下記の 2 つから解になることが確認できる。

$$\begin{aligned} & (1 - M^2) \left(\frac{ik}{1+M} \right)^2 \phi + 2ikM \left(\frac{ik}{1+M} \right) \phi + k^2 \phi \\ &= k^2 \phi \left\{ -\frac{1-M^2}{(1+M)^2} - \frac{2M}{1+M} + 1 \right\} \\ &= \frac{k^2 \phi}{(1+M)^2} \{ -(1-M^2) - 2M(1+M) + (1+M)^2 \} = 0 \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} & (1 - M^2) \left(\frac{ik}{1-M} \right)^2 \phi - 2ikM \left(\frac{ik}{1-M} \right) \phi + k^2 \phi \\ &= k^2 \phi \left\{ -\frac{1-M^2}{(1-M)^2} + \frac{2M}{1-M} + 1 \right\} \\ &= \frac{k^2 \phi}{(1-M)^2} \{ -(1-M^2) + 2M(1-M) + (1-M)^2 \} = 0 \end{aligned} \quad (78)$$

ここで進行波に対して、

$$\frac{i\omega\rho\phi}{\text{grad}\phi} = \frac{i\omega\rho\exp\left(\frac{ikx}{1+M}\right)}{\frac{ik}{1+M}\exp\left(\frac{ikx}{1+M}\right)} = \frac{i\omega\rho}{\frac{ik}{1+M}} = (1+M)\rho c \quad (79)$$

である。従って、1 次元の無反射境界条件は、

$$i\omega\rho\phi - (1+M)\rho c \cdot \text{grad}\phi = 0 \quad (80)$$

として与えればよいことが分かる。

6.2. 流れがある場合の音圧の式

流れがある場合の音圧の式を確認する。ここでは、速度場と音圧を音響速度ポテンシャルを利用した表現について確認する。速度場においては、

$\frac{\partial}{\partial t}$ の代わりに

$$\frac{D_0}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \quad (81)$$

となる。ここで、粒子速度 $\mathbf{V}(x, t) = \text{grad}(\Psi(x, t))$ については、

$$\Psi(x, t) = \sum_{\nu=1, \infty} \varphi_{\nu}(x) e^{-i\omega t} \quad (82)$$

と

$$V(x, t) = \sum_{\nu=1, \infty} v_{\nu}(x) e^{-i\omega t} \quad (83)$$

を代入して

$$\sum_{\nu=1, \infty} v_{\nu}(x) e^{-i\omega t} = \sum_{\nu=1, \infty} \text{grad} \varphi_{\nu}(x) e^{-i\omega t} \quad (84)$$

$$v(x) = \text{grad} \varphi(x) \quad (85)$$

となる。また、音圧は、ここで

$$P(x, t) = -\rho \frac{D\Psi(x, t)}{Dt} \quad (86)$$

に

$$\Psi(x, t) = \sum_{\nu=1, \infty} \varphi_{\nu}(x) e^{-i\omega t} \quad (87)$$

と

$$P(x, t) = \sum_{\nu=1, \infty} p_{\nu}(x) e^{-i\omega t} \quad (88)$$

を代入して

$$\sum_{\nu=1, \infty} p_{\nu}(x) e^{-i\omega t} = -\rho \sum_{\nu=1, \infty} \frac{D}{Dt} \varphi_{\nu}(x) e^{-i\omega t} \quad (89)$$

$$\sum_{\nu=1, \infty} p_{\nu}(x) e^{-i\omega t} = -\rho \sum_{\nu=1, \infty} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla \right) \varphi_{\nu}(x) e^{-i\omega t} \quad (90)$$

$$\sum_{\nu=1, \infty} p_{\nu}(x) e^{-i\omega t} = -\rho \sum_{\nu=1, \infty} (-i\omega + v_0 \cdot \nabla) \varphi_{\nu}(x) e^{-i\omega t} \quad (91)$$

従って、

$$p(x) = \rho(i\omega \phi(x) - v_0 \cdot \nabla \phi(x)) \quad (92)$$

が成り立つ。

謝辞. 本解析は、鳥取大学大学院工学研究科 西村正治教授にご指導をいただきながら進めています。

参考文献

- [1] R.M.Munt, "Acoustic Transmission Properties of a Jet Pipe with Subsonic Jet Flow: I. The Cold Jet Refraction Coefficient," Journal of Sound and

Vibration, 142(3), 413-436. 1990

- [2] 社河内 敏彦, "噴流工学—基礎と応用," 森北出版株式会社(2004)
- [3] P.M.Morse, K.U.Ingard, "Theoretical Acoustics", Princeton University Press 1986
- [4] 鈴木昭次, 西村正治ら, "機械音響工学," コロナ社(2004)
- [5] 松原 聖, 桑原 匠史, "音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise の現状", アドバンスシミュレーション Vol.15, 2013.5
- [6] 松原 聖, "音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise の解析手法", アドバンスシミュレーション Vol.15, 2013.5
- [7] 松原 聖, 桑原 匠史, 戸田 則雄, 大西 陽一, 大家 史, "音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise を利用した連成解析", アドバンスシミュレーション Vol.15, 2013.5
- [8] 松原 聖, 桑原 匠史, "音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise の解析事例", アドバンスシミュレーション Vol.15, 2013.5
- [9] 松原 聖, "音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise の透過音解析機能", アドバンスシミュレーション Vol.16, 2013.8
- [10] M.S.Howe, "Theory of Vertex Sound", Cambridge, 2003
- [11] P.M.Morse, K.U.Ingard, "Theoretical Acoustics", prenceton University Press, 1986
- [12] H. Levine et.al, "On the radiation of sound from an unflanged circular pipe", Phys. Rev. 73, 383-406 (1948)
- [13] 中森一郎, "高速流解析ソフトウェア Advance/FrontFlow/FOCUS の概要", アドバンスシミュレーション Vol.16, 2013.8

※技術情報誌アドバンスシミュレーションは、アドバンスソフト株式会社 ホームページのシミュレーション図書館から、【カラー版】がダウンロードできます。(ダウンロードしていただくには、アドバンス/シミュレーションフォーラム会員登録が必要です。)