

音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoiseの解析手法

松原 聖*

Algorithm of Acoustic Simulation Software : Advance/FrontNoise

Kiyoshi Matsubara*

2005年に開発を開始した音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise は、境界要素法での簡易なモデルの解析から開始し、有限要素法に切り替えることにより、取り扱う解析対象や境界条件を拡張しながら、大規模計算に挑戦してきた。本稿では、現在の音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise [1] [2] [3] [4]で利用している基礎方程式、境界条件、数値解法等について述べる。現在のソフトウェアでは、離散化の手法として有限要素法のみを利用しているが、本稿では参考までに開発当初利用していた境界要素法の定式化も合わせて示す。

Key word: 音響解析、周波数領域、大規模計算、並列計算、有限要素法、境界要素法

1. はじめに

音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise では、音響の基礎方程式を周波数空間に変換し、その周波数空間に有限要素法を適用して解く。また、現象に応じて適切な境界条件および適切な方法で音源を与える必要がある。

ユーザーの利用方法は以下の通りである。まず、音の伝播する領域、解析対象とする周波数を定める。その領域を有限要素のメッシュを作成する。境界条件として、解析領域内の音源の周波数と強さを与える。また、壁等には境界条件を与える。指定された周波数に対して、解析領域内すべての点における音響速度ポテンシャル（音圧、粒子速度）を求めることができる。解析の後処理として、空間の音圧レベルや対象機器の透過損失等を求めることができる。対象とする周波数の数だけ解析を行う。もちろん、一般的に音源が不明な場合には音響解析はできない。

本稿では、Advance/FrontNoise で採用している基礎方程式、離散化の方法、数値アルゴリズムについて述べる。

2. 音響解析の基礎式

2.1. 音響解析の基礎方程式（速度なし）

本システムでは、解くべき変数を音響速度ポテンシャル $\Psi(x, t)$ とする。以降、 x は 3 次元における位置を表し、 t は時間である。音響速度ポテンシャルに対して、粒子速度 $V(x, t)$ 、音圧 $P(x, t)$ が次のような関係にある。

$$V(x, t) = \text{grad}(\Psi(x, t)) \quad (1)$$

$$P(x, t) = -\rho \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} \quad (2)$$

この音響速度ポテンシャル $\Psi(x, t)$ に対しては、通常の波動方程式

$$\nabla^2 \Psi(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} \quad (3)$$

が成り立つ。ここで、 c は音速である。また、同様に、

$$\nabla^2 V(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} \quad (4)$$

$$\nabla^2 P(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial t^2} \quad (5)$$

が成り立つ。ここで、音響速度ポテンシャル $\Psi(x, t)$ を Fourier 展開

*アドバンスソフト株式会社 第1事業部
1st Computational Science and Engineering
Group, AdvanceSoft Corporation

$$\Psi(x, t) = \sum_{\nu=1, \infty} \varphi_{\nu}(x) e^{-i\omega t} \quad (6)$$

$$\omega = 2\pi\nu \quad (7)$$

をする。各周波数成分 $\varphi_{\nu}(x)$ に対して、

$$\nabla^2 \varphi(x) + k^2 \varphi(x) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (8)$$

$$k = \frac{2\pi\nu}{c} \quad (9)$$

となり、Helmholtz 方程式に変換することができる。ここで、 $\varphi_{\nu}(x)$ を $\varphi(x)$ と書いた。以下でも同様の記法を利用することがある。ここで、 $\varphi(x)$ は複素数であり、以下同様である。

2.2. 音響解析の基礎方程式（速度あり）

本ソフトウェアでは、速度を含む音響の基礎方程式を解く。当然その式は、速度なしの場合の拡張となっている。具体的には、文献[5]の 1.2 節、5.2 節等、および文献[6]の 11.1 節の定式化に基づく。また、速度ありの基礎方程式の離散化については、広く利用されている有限要素法を利用して計算を行う。これらの文献で述べられている速度を含んだ音響解析の基礎方程式 convected wave equation は、

$$V(x, t) = \text{grad}(\Psi(x, t)) \quad (10)$$

を用いた形に変形すると

$$\frac{D_0}{Dt} \left(\frac{\rho}{c^2} \frac{D_0 \Psi}{Dt} \right) - \nabla \cdot (\rho \nabla \Psi) = 0 \quad (11)$$

である。ここで、 Ψ は音響速度ポテンシャル、 ρ 、 c 、および v_0 は、密度、音速、局所的な媒体の流速である。また、

$$\frac{D_0}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla \quad (12)$$

である。これを、周波数領域で解く。この場合には、

$$\Psi(x, t) = \sum_{\nu=1, \infty} \phi(x) e^{-i\omega t} \quad (13)$$

を仮定している。ここで、 $\omega = 2\pi\nu$ である。この表現を利用して、音圧は、

$$P(x, t) = -\rho \frac{D\Psi(x, t)}{Dt} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \sum_{\nu=1, \infty} p(x) e^{-i\omega t} \\ &= -\rho \frac{D}{Dt} \left(\sum_{\nu=1, \infty} \phi(x) e^{-i\omega t} \right) \\ &= -\rho \sum_{\nu=1, \infty} (-i\omega \phi + v_0 \cdot \nabla \phi) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (15)$$

$$p(x) = -\rho (-i\omega \phi(x) + v_0 \cdot \nabla \phi(x)) \quad (16)$$

となる。音響速度ポテンシャルを書き換える。

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \Phi(t, x) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + Mc \cdot \nabla \right) \phi(x) e^{-i\omega t} \\ &= \{-i\omega \phi(x) + Mc \cdot \nabla \phi(x)\} e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (17)$$

また、

$$\nabla \cdot \rho \nabla \Phi(t, x) = \rho \nabla \cdot \nabla \phi(x) e^{-i\omega t} \quad (18)$$

である。以下の記述では、

$$M \cdot \nabla = M_x \frac{\partial}{\partial x} + M_y \frac{\partial}{\partial y} + M_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (19)$$

であり、

$$\begin{aligned} (M \cdot \nabla)^2 &= \left(M_x \frac{\partial}{\partial x} + M_y \frac{\partial}{\partial y} + M_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &\quad \left(M_x \frac{\partial}{\partial x} + M_y \frac{\partial}{\partial y} + M_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= M_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + M_y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + M_z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &\quad + 2M_x M_y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2M_y M_z \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + 2M_z M_x \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \end{aligned} \quad (20)$$

である。これを用いて、

$$\begin{aligned} &\frac{D}{Dt} \left(\frac{\rho}{c^2} \frac{D}{Dt} \Phi(t, x) \right) \\ &= \frac{D}{Dt} \left(\frac{\rho}{c^2} \{-i\omega \phi(x) + Mc \cdot \nabla \phi(x)\} e^{-i\omega t} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + Mc \cdot \nabla \right) \\ &\quad \left(\frac{\rho}{c^2} \{-i\omega \phi(x) + Mc \cdot \nabla \phi(x)\} e^{-i\omega t} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

さらに

$$\begin{aligned}
&= -i\omega \frac{\rho}{c^2} \{-i\omega\phi(x) + Mc \cdot \nabla\phi(x)\} e^{-i\omega t} \\
&+ \frac{\rho}{c^2} Mc \cdot \nabla \{-i\omega\phi(x) + Mc \cdot \nabla\phi(x)\} e^{-i\omega t} \\
&= \left(-\frac{\rho}{c^2} \omega^2 \phi(x) - i\omega \frac{\rho}{c^2} Mc \cdot \nabla\phi(x) \right) e^{-i\omega t} \\
&+ \left(-i\omega \frac{\rho}{c^2} Mc \cdot \nabla\phi(x) + \frac{\rho}{c^2} (Mc \cdot \nabla)^2 \phi(x) \right) e^{-i\omega t}
\end{aligned} \quad (22)$$

となり、

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{\rho}{c^2} \omega^2 \phi(x) - 2i\omega \frac{\rho}{c^2} Mc \cdot \nabla\phi(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\rho}{c^2} (Mc \cdot \nabla)^2 \phi(x) \right) e^{-i\omega t} \\
&= \rho e^{-i\omega t} \left(-\frac{\omega^2}{c^2} \phi(x) - 2i \frac{\omega}{c} M \cdot \nabla\phi(x) \right. \\
&\quad \left. + (M \cdot \nabla)^2 \phi(x) \right)
\end{aligned} \quad (23)$$

と整理できる。さらに、

$$\begin{aligned}
&\rho e^{-i\omega t} \left(-\frac{\omega^2}{c^2} \phi(x) - 2i \frac{\omega}{c} M \cdot \nabla\phi(x) + (M \cdot \nabla)^2 \phi(x) \right) \\
&- \rho \nabla \cdot \nabla \phi(x) e^{-i\omega t} = 0
\end{aligned} \quad (24)$$

である。従って、最終的に、周波数領域での音響方程式は、

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \nabla \phi(x) - (M \cdot \nabla)^2 \phi(x) \\
&+ 2ikM \cdot \nabla\phi(x) + k^2 \phi(x) = 0
\end{aligned} \quad (25)$$

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (26)$$

と書くことができる。これを書き下すと

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \nabla \phi(x) - (M \cdot \nabla)^2 \phi(x) + 2ikM \cdot \nabla\phi(x) + k^2 \phi(x) = 0 \\
&M_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + M_y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + M_z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
&+ 2M_x M_y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2M_y M_z \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + 2M_z M_x \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}
\end{aligned} \quad (27)$$

であり、具体的に、周波数領域の基礎方程式を書き下すと、

$$\begin{aligned}
&\left(1 - M_x^2\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \left(1 - M_y^2\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left(1 - M_z^2\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\
&- \left(2M_x M_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + 2M_y M_z \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \right. \\
&\quad \left. + 2M_z M_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} \right) \\
&- 2ik \left(M_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + M_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + M_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + k^2 \phi = 0
\end{aligned} \quad (28)$$

となる。ここで、

$$M_x = \frac{u}{c}, \quad M_y = \frac{v}{c}, \quad M_z = \frac{w}{c} \quad (29)$$

とした。確認のため、速度なしの式は、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + k^2 \phi = 0 \quad (30)$$

である。(28)式からは、 M_x 、 M_y 、 M_z が1と比較して小さければ、速度の効果は小さいことが分かる。

3. 境界条件

3.1. 境界条件の一般形

境界条件は、各周波数成分 $\phi(x)$ に対して、

$$\begin{aligned}
&\alpha(x)\phi(x) + \beta(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial n} = f(x) \\
&\text{on } \partial\Omega
\end{aligned} \quad (31)$$

の混合境界条件を課す[9]。一般には、 $f(x)$ に境界面における音源を与える。例えば、音源となる入口での音響をこの条件で与えることができる。特に、数学的には、 $\beta(x)=0$ のとき Dirichlet 型の境界であり、 $\alpha(x)=0$ のとき Neumann 型の境界条件である。この境界条件は数学的な記述であるが、物理的には、

- ・ 音源となる壁の圧力振動
- ・ 音源となる壁の速度・加速度
- ・ 壁のインピーダンス

を与えることができる。完全反射（剛壁）の条件もこの条件の特殊な場合として表現することが

可能である。

表 1 境界条件の設定方法

境界条件	$\alpha(x)$	$\beta(x)$	$f(x)$	備考
時系列圧力	$i\omega\rho$	0	$-p_i(x)$	流体音響連成
時系列速度	0	1	$v_i(x)$	構造音響連成
時系列変位・加速度	0	1	$-i\omega u_i(x) - \frac{1}{i\omega} a_i(x)$	構造音響連成
インピーダンス	$i\omega\rho$	$-Z$	0	
完全反射	0	1	0	デフォルト
完全吸収	$i\omega\rho$	ρc	0	ρc 境界

3.2. 時系列音圧による境界条件

まず、音圧の時系列変動で与えられた場合について示す。

$$P_0(x, t) = -\rho \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\sum_{\nu=1, \infty} i\omega\rho\varphi(x)e^{-i\omega t} \quad (32)$$

一方、音圧も時間方向に、Fourier 展開して、

$$P_0(x, t) = \sum_{\nu=1, \infty} p_i(x)e^{-i\omega t} \quad (33)$$

と表現する。従って、

$$i\omega\rho\varphi(x) = -p_i(x) \quad (34)$$

となる。上記の数学的な表現で記述すると、

$$\alpha(x) = i\omega\rho, \beta(x) = 0, f(x) = -p_i(x) \quad (35)$$

となる。すでに周波数毎の音圧が与えられている場合には、その値を上記の $p_i(x)$ とすればいい。

3.3. 加速度の境界条件

次に、流体解析以外のソフトウェアから、加速度の時系列変動で与えられた場合について示す。基本的な関係式は、

$$-\frac{\partial P(x, t)}{\partial n} = \rho\alpha_0(x, t) \quad (36)$$

$$P(x, t) = -\rho \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} \quad (37)$$

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\sum_{\nu=1, \infty} i\omega\varphi(x)e^{-i\omega t} \quad (38)$$

である。一方、加速度も時間方向に、Fourier 展開して、

$$\alpha_0(x, t) = \sum_{\nu=1, \infty} \alpha_i(x)e^{-i\omega t} \quad (39)$$

と表現する。

$$-\frac{\partial P(x, t)}{\partial n} = \rho \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\sum_{\nu=1, \infty} i\omega\rho \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} e^{-i\omega t} \quad (40)$$

$$-\sum_{\nu=1, \infty} i\omega\rho \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} e^{-i\omega t} = \sum_{\nu=1, \infty} \alpha_i(x)e^{-i\omega t} \quad (41)$$

従って、

$$i\omega\rho \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} = -\alpha_i(x) \quad (42)$$

となる。上記の数学的な表現で記述すると、

$$\alpha(x) = 0, \beta(x) = i\omega\rho, f(x) = -\alpha_i(x) \quad (43)$$

となる。すでに周波数毎の加速度が与えられている場合には、その値を上記の $\alpha_i(x)$ とすればいい。

3.4. 壁のインピーダンス条件

物理的に与えられるインピーダンス Z は、

$$Z = \frac{P}{V} \quad (44)$$

である。壁に対して normal 方向の成分が有効であるため、 n を壁での法線ベクトルとして、

$$Z = \frac{P(x, t)}{n \cdot V(x, t)} = \frac{\rho \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}}{n \cdot \text{grad}(\Psi(x, t))} = \frac{\rho \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}}{\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial n}} \quad (45)$$

が成り立つ。ここで、

$$\Psi(x, t) = \sum_{\nu=1, \infty} \varphi(x)e^{-i\omega t} \quad (46)$$

を利用すると、

$$Z = \frac{i\omega\rho \sum_{\nu=1, \infty} \varphi(x)e^{-i\omega t}}{\sum_{\nu=1, \infty} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} e^{-i\omega t}} \quad (47)$$

$$\sum_{\nu=1,\infty} Z \frac{\partial \phi(x)}{\partial n} e^{-i\omega t} = \sum_{\nu=1,\infty} i\omega \rho \phi(x) e^{-i\omega t} \quad (48)$$

となる。従って、周波数成分毎に、

$$Z \frac{\partial \phi(x)}{\partial n} = i\omega \rho \phi(x) \quad (49)$$

が成り立ち、上記の数学的な表現で記述すると、

$$\alpha(x) = i\omega \rho, \quad \beta(x) = -Z, \quad f(x) = 0 \quad (50)$$

となる。また、周波数毎にインピーダンスを与える場合には、

$$\alpha(x) = i\omega \rho, \quad \beta(x) = -Z_\omega, \quad f(x) = 0 \quad (51)$$

とすればいい。

3.5. デフォルトの境界条件

デフォルトの境界条件（境界条件設定ファイルで何も与えない境界における境界条件）は、

$$Z = \infty \quad (52)$$

として設定される。すなわち、音響速度ポテンシャルの法線方向の微分が0である。有限要素法ではこの条件は自然に満たされる（何も条件を設定しない境界でこの条件は満たされる）。従って、この条件がデフォルトの境界条件となる。

3.6. ρc 境界

また、原点に点音源を配置し、周囲の球面に ρc 境界を与えた場合について、音響の基礎方程式は下記の通りである。

$$\text{div}(\text{grad} \phi(x)) + k^2 \phi(x) = q_0 \delta(0) \quad \text{in } \Omega \quad (53)$$

$$ik\phi(x) - \frac{\partial \phi(x)}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (54)$$

ここで、(54)式が ρc 境界に相当する。これは、従来のインピーダンスの与え方に対応し、

$$Z \frac{\partial \phi(x)}{\partial n} = i\omega \rho \phi(x) \quad (55)$$

のインピーダンスに $Z = \rho c$ と設定することである。

ここで、 $k = \frac{\omega}{c} \left(= \frac{2\pi f}{c} \right)$ とした。一次元で ρc 境界の問題を考える。音響速度ポテンシャル

$\phi(x)$ は複素数であるが、(53)式の係数はすべて実数である。このことは、領域内部では、 $\phi(x)$ の実部と虚部が相互に影響を及ぼさないことを意味する。また、(54)式は係数が複素数であるため $\phi(x)$ の実部と虚部をつなぐ役割を果たしている。音の放射では実部と虚部の双方が重要な役割を演じる。従って、本問題においては、 ρc 境界において(54)式を正しく評価することで、解析全体で精度の高い解を得ることができる。一次元での放射問題の解析解は、

$$\phi(x) = \cos(kx) + i \sin(kx) \quad (56)$$

である。ここでは、原点で $\phi(x) = 1 + i \cdot 0$ となる解を考えている。この解は、任意の点で、

$$\begin{aligned} ik\phi(x) - \frac{\partial \phi(x)}{\partial n} \\ = ik(\cos(kx) + i \sin(kx)) \\ - (-k \sin(kx) + ik \cos(kx)) \\ = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

を満たす。これが、 ρc 境界の設定により放射が表現できる根拠である。ただし、これは境界に垂直に入射する場合に限られる。従って、厳密には、斜めに入射する音響に対しては、 ρc 境界は吸収境界とはならない。ただし、数値実験からかなりいい近似になっていることは間違いない。

3.7. 球面上の ρc 境界の補正

本節では、球面上 ρc 境界の低周波補正について示す。球座標において、原点に点音源を配置し、周囲の球面に ρc 境界を与えた場合について、音響の基礎方程式は下記の通りである。

$$\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi(x)}{\partial r} + k^2 \phi(x) = q_0 \delta(0) \quad \text{in } \Omega \quad (58)$$

$$ik\phi(x) - \frac{\partial \phi(x)}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (59)$$

解析解は、

$$\phi(x) = \frac{1}{r} \cos(kx) + i \frac{1}{r} \sin(kx) \quad (60)$$

であるため、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(x)}{\partial r} = & -\frac{1}{r^2} \cos(kx) - \frac{k}{r} \sin(kx) \\ & -i \frac{1}{r^2} \sin(kx) + i \frac{k}{r} \cos(kx) \end{aligned} \quad (61)$$

であり、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial r^2} = & \frac{2}{r^3} \cos(kx) + \frac{k}{r^2} \sin(kx) + i \frac{2}{r^3} \sin(kx) - i \frac{k}{r^2} \cos(kx) \\ & + \frac{k}{r^2} \sin(kx) - \frac{k^2}{r} \cos(kx) - i \frac{k}{r^2} \cos(kx) - i \frac{k^2}{r} \sin(kx) \end{aligned} \quad (62)$$

となり、(58)を満たすことが分かる。しかし、(59)は満たすのであろうか？上式を利用して計算すると

$$ik\phi(x) - \frac{\partial \phi(x)}{\partial n} = \frac{1}{r^2} \cos(kx) + i \frac{1}{r^2} \sin(kx) \quad (63)$$

となり、(59)式を満たさない。これを書き換えると、放射の解析解は

$$\left(ik - \frac{1}{r^2} \right) \phi(x) - \frac{\partial \phi(x)}{\partial n} = 0 \quad (64)$$

を満たすことが分かる。さらに、第1項の係数を見ると、低周波ほど、 $-\frac{1}{r^2}$ の項の寄与率が大きくなることが分かる。例えば、 $r=1.5[\text{m}]$ のケースを考えると、 $k = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{300} f$ であるため、周波数 50,100,200,400[Hz]の場合には、 $-\frac{1}{r^2}$ の寄与率は、42%、21%、10%、5%程度の寄与率であることが分かる。音圧レベルにするとさらに寄与率は小さくなる。ただし、これよりも高周波ではほとんど結果に差異がない。

3.8. 円筒形出口の放射境界条件

出口全体の面に対しては、参考文献[7]により、ダクト開口端の放射インピーダンス Z を与える。

ここで、 $J_m(\cdot)$ と $H_m(\cdot)$ をベッセル関数、シュトルーベ関数として、

$$\begin{aligned} Z = \rho c \zeta_r &= \rho c (\theta_r + i \chi_r) \\ &= \rho c \left(1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} + i \frac{H_1(2ka)}{ka} \right) \end{aligned} \quad (65)$$

$$\theta_r \approx \frac{1}{2}(ka)^2, \quad \chi_r \approx \frac{8}{3\pi} ka \quad (66)$$

である[7]。本計算では、後者の $ka < 0.6$ での近似式を利用した。

次に、開口端の放射インピーダンス Z を境界条件として与える方法について説明する。一般的に、物理的に与えられるインピーダンス Z は、

$$Z = \frac{P}{V} \quad (67)$$

である。壁に対して法線方向の成分が有効であるため、 n を壁での法線ベクトルとして、

$$Z = \frac{P(x,t)}{n \cdot V(x,t)} = \frac{-\rho \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}}{n \cdot \text{grad}(\Psi(x,t))} = \frac{-\rho \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}}{\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial n}} \quad (68)$$

が成り立つ。ここで、

$$\Psi(x,t) = \sum_{\nu=1,\infty} \phi(x) e^{-i\omega t} \quad (69)$$

を利用すると、

$$Z = \frac{i\omega \rho \sum_{\nu=1,\infty} \phi(x) e^{-i\omega t}}{\sum_{\nu=1,\infty} \frac{\partial \phi(x)}{\partial n} e^{-i\omega t}} \quad (70)$$

$$\sum_{\nu=1,\infty} Z \frac{\partial \phi(x)}{\partial n} e^{-i\omega t} = \sum_{\nu=1,\infty} i\omega \rho \phi(x) e^{-i\omega t} \quad (71)$$

となる。従って、周波数成分毎に、

$$Z \frac{\partial \phi(x)}{\partial n} = i\omega \rho \phi(x) \quad (72)$$

が成り立ち、境界条件の表現で記述すると、

$$\alpha(x) = i\omega \rho, \quad \beta(x) = -Z, \quad f(x) = 0 \quad (73)$$

となる。

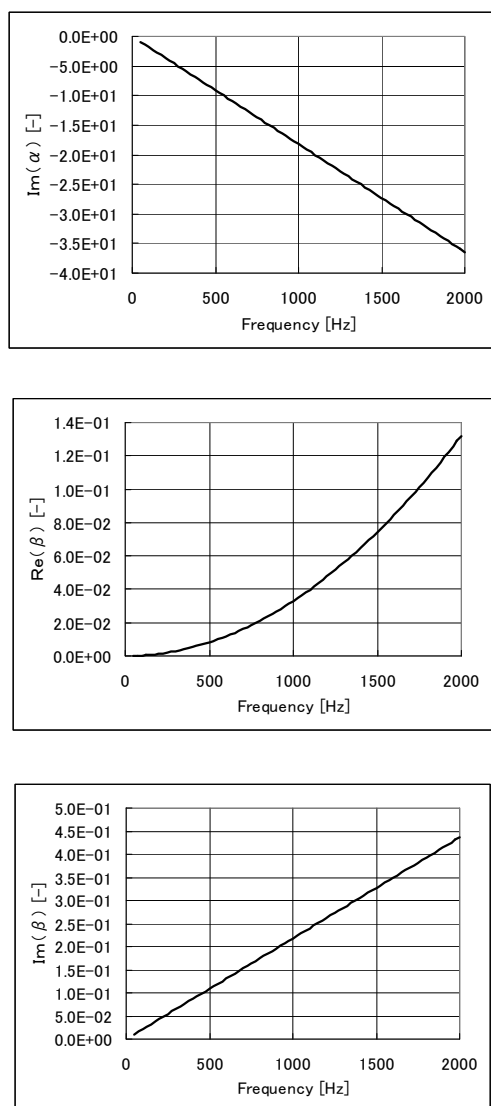


図 1 円形出口の放射境界条件係数

4. 音源項

4.1. 音源の一般形

本ソフトウェアでは境界で与える音源の他に、節点で与える音源が設定可能である。この機能を利用して、点音源、二重極音源、四重極音源を設定することが可能である。

二重極音源は逆位相の点音源を近接させて与える機能である。また、四重極音源は逆位相の点音源のペアを 2 組与える機能である。

流体解析の結果を利用して音響解析を実施する場合には、固体壁付近の圧力変動を音源として与える場合を二重極音源となり、また、流体の乱れに起因する音源を四重極音源となる。ただし、単独の二重極音源および四重極音源とは別の機能となる。

これらの流体解析で利用する機能を含め、本ソフトウェアで音源として設定可能な機能を下記に示す。

表 2 Advance/FrontNoise の音源設定機能

音源	単独の音源	分布する音源
点音源	基礎方程式のソース項とする。	—
二重極音源	1 点を指定することで、二重極音源を計算できる入力ファイルを変換するツールを提供している。	初期からの機能。壁の境界条件として、圧力または粒子速度の境界条件として取り扱う。
四重極音源	1 点を指定することで、四重極音源を計算できる入力ファイルを変換するツールを提供している。	空間に分布する音源として取り扱う。Lighthill テンソルの 2 階微分の音源を設定する。

既存の基礎方程式

$$\nabla^2 \phi(x) + k^2 \phi(x) = 0 \quad (74)$$

に対して、点音源の荷重項が加わることになる。すなわち、

$$\nabla^2 \phi(x) + k^2 \phi(x) = q_0 \delta(x_0) \quad (75)$$

である。ここで、 q_0 は体積速度であり、単位は m^3/sec であり、 $\delta(\cdot)$ はデルタ関数である。すなわち、この式を $x = x_0$ の近傍で積分して、

$$\int \left\{ \nabla^2 \phi(x) + k^2 \phi(x) \right\} dv = q_0 \quad (76)$$

$|x-x_0|<\epsilon$
という表現となる。

4.2. 体積加速度の定義方法

点音源に $1[m^3/s^2]$ となる体積加速度を定義するには、Advance/FrontNoise の境界条件として設定する方法について述べる。

ひとつの方法としては、小さい球の表面に対して、次の境界条件を与える。以下では、小さい球

の表面積を S とし、粒子速度 $V(x, t)$ と音響速度ポテンシャル $\phi(x, t)$ である。

ここで、音源として体積加速度 $1.0[m^3/s^2]$ を与えるということは、

$$S \frac{\partial V(x)}{\partial t} = 1.0[m^3/s^2] \quad (77)$$

である。一方、粒子速度と音響速度ポテンシャルの関係は、

$$V(x, t) = \text{grad}(\phi(x, t)) \quad (78)$$

であり、周波数空間では、 $\phi(x, t) = \phi(x)e^{-i\omega t}$ 、 $V(x, t) = V(x)e^{-i\omega t}$ であるため、

$$V(x) = \text{grad}(\phi(x)) \quad (79)$$

である。これらの関係式を利用して、

$$\frac{\partial V(x)}{\partial t} = i\omega V(x) = i\omega \text{grad}(\phi(x)) \quad (80)$$

となる。体積加速度の式に代入すると、

$$Si\omega \text{grad}(\phi(x)) = 1.0[m^3/s^2] \quad (81)$$

となり、境界では、

$$i\omega S \frac{\partial \phi(x)}{\partial n} = 1.0[m^3/s^2] \quad (82)$$

である。これを境界条件の一般形で

$$\alpha(x)\phi(x) + \beta(x)\frac{\partial \phi(x)}{\partial n} = f(x) \quad (83)$$

の形式にすると

$$\alpha(x) = 0, \beta(x) = i\omega S, \quad f(x) = 1.0 \quad (84)$$

となる。ソフトウェアでは、この値を境界条件ファイル (*.bcv) に対して、周波数毎に与えることで音源を設定する。

4.3. 点音源の定式化に関する注意

点音源は、体積の湧きだしなので、基礎方程式

$$\text{div}(\text{grad}\phi(x)) + k^2\phi(x) = 0 \quad (85)$$

の右辺に対して荷重項が加わることになる。すなわち、

$$\text{div}(\text{grad}\phi(x)) + k^2\phi(x) = q_0\delta(x_0) \quad (86)$$

である。ここで、 q_0 は体積速度であり、単位は m^3/sec である。 $\delta(\cdot)$ はデルタ関数である。この式を $x = x_0$ のまわりで積分すれば、

$$\int_{\Omega_{x_0}} \text{div}(\text{grad}\phi(x)) + k^2\phi(x) = q_0 \quad (87)$$

となる。ちなみに単位を確認すると、左辺第1項は

$$m^3 \frac{1}{m} \frac{1}{m} \frac{m^2}{\text{sec}} \quad (88)$$

であり、正しい。ここで、音響速度ポテンシャルの単位は m^2/sec である。これは、離散化したときに該当する節点に、そのまま q_0 を与えればいいことを示している。プログラム中では、離散化された方程式は1行それぞれが体積で積分された式となっているが、この音源はすでに積分されているため、そのまま右辺項に設定するだけとなる。

ここでひとつ注意事項がある。点音源を境界条件で与えることはできない。なぜなら、音響速度ポテンシャルの境界条件として与えようとした場合には、点音源の位置で音響速度ポテンシャルが ∞ になるからである。

4.4. 点音源の体積速度と音響パワーについて

本節では、点音源で与えた体積速度とマクロ的な音響パワーの関係について示す。まず、音響の基礎方程式

$$\text{div}(\text{grad}\phi(x)) + k^2\phi(x) = 0 \quad (89)$$

に対して、点音源を与えた場合には、

$$\text{div}(\text{grad}\phi(x)) + k^2\phi(x) = q_0\delta(x_0) \quad (90)$$

となる。ここで、前節の定義と同じく q_0 は体積速度であり、単位は m^3/sec であり、 $\delta(\cdot)$ はデルタ関数である。この方程式には解析解が存在し、

$$\phi(r) = \frac{q_0}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (91)$$

となる。ここで、 $k = \omega / c$ 、 $\omega = 2\pi f$ である。従って、音圧と粒子速度は、

$$p(r) = i\omega\rho \frac{q_0}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (92)$$

$$V(r) = \frac{1+ikr}{r} \frac{q_0}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (93)$$

である。音響パワーの定義は、音圧と（同相の）粒子速度を乗じて球面で積分した値なので、

$$W = \left| 4\pi r^2 p(r) V(r) \right| = \left| 4\pi r^2 i\omega\rho \frac{\varpi}{c} \left(\frac{q_0}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right|^2 = \frac{q_0^2}{4\pi} \frac{\rho}{c} \varpi^2 \quad (94)$$

となる。もちろん、ここで求めた値は、点音源からの放射であるため、任意の球面上で定数となる。結論として、音響パワーは体積速度を利用して

$$W = \frac{q_0^2}{4\pi} \frac{\rho}{c} \varpi^2 \quad (95)$$

となる。ここで、周波数をと f して $\varpi = 2\pi f$ である。

4.5. 壁面に分布する二重極音源

まず、圧力の時系列変動で与えられた場合について示す。これは、流体解析で得られた壁面での圧力分布を音源として与えて音響計算することを想定している。

$$P_0(x, t) = -\rho \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} \quad (96)$$

$$= -\sum_{\nu=1, \infty} i\omega\rho\phi(x) e^{-i\omega t}$$

一方、圧力も時間方向に、Fourier 展開して、

$$P_0(x, t) = \sum_{\nu=1, \infty} p_i(x) e^{-i\omega t} \quad (97)$$

と表現する。従って、

$$i\omega\rho\phi(x) = -p_i(x) \quad (98)$$

となる。上記の数学的な表現で記述すると、

$$\alpha(x) = i\omega\rho, \quad \beta(x) = 0, \quad f(x) = -p_i(x) \quad (99)$$

となる。すでに周波数毎の音圧が与えられている場合には、その値を上記の $p_i(x)$ とすればいい。

4.6. 空間に分布する四重極音源

流体解析の結果から得られる流速を利用して、Lighthill テンソルを次のように定義したとき、

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + p_{ij} - a_0^2 \rho \delta_{ij} \approx \rho v_i v_j \quad (100)$$

運動方程式より以下の式が導かれる。

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + a_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = -\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (101)$$

連続の式を使って変形すると

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = a_0^2 \nabla^2 \rho + \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (102)$$

となる。この式を音響速度ポテンシャル $v(x, t) = \text{grad}(\phi(x, t))$ を用いて書き直すと、

$$-\frac{\rho}{a_0^2} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial t^3} = -\rho \nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (103)$$

となる。 $T_{ij} = \sum_{\omega} \tilde{T}_{ij}(x) \exp[-i\omega t]$ を用いて周波数成分に直すと

$$\nabla^2 \tilde{\phi} + k^2 \tilde{\phi} = -i \frac{1}{\rho a_0} \frac{\partial^2 \tilde{T}_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (104)$$

となる。この方程式を周波数領域で解く。

5. 離散化手法

5.1. 基礎方程式の離散化

基礎方程式は、次のヘルムホルツ方程式である。

$$\nabla^2 \phi(x) + k^2 \phi(x) = 0 \quad (105)$$

すなわち

$$\text{div}(\text{grad} \phi(x)) + k^2 \phi(x) = 0 \quad (106)$$

である。以下、Galerkin 法により定式化する。

基礎方程式は、

$$\text{div}(\text{grad} \phi(x)) + k^2 \phi(x) = 0 \quad (107)$$

以下、Galerkin 法に従って定式化する。ここで、まず、四面体の形状関数 $N_j(x)$ 、 $j = 1, 2, 3, 4$ を乗じて、

$$N_j(x) \text{div}(\text{grad} \phi(x)) + k^2 N_j(x) \phi(x) = 0 \quad (108)$$

となる。任意の領域 Ω で積分して、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_j(x) \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi(x)) dv \\ + \int_{\Omega} k^2 N_j(x) \varphi(x) dv = 0 \end{aligned} \quad (109)$$

となる。ここで、積の微分から

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(N_j(x) \operatorname{grad} \varphi(x)) \\ = \operatorname{grad}(N_j(x)) \operatorname{grad} \varphi(x) \\ + N_j(x) \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi(x)) \end{aligned} \quad (110)$$

を利用して、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(N_j(x) \operatorname{grad} \varphi(x)) dv \\ = \int_{\Omega} \operatorname{grad}(N_j(x)) \operatorname{grad} \varphi(x) dv \\ + \int_{\Omega} N_j(x) \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi(x)) dv \end{aligned} \quad (111)$$

である。ここで、左辺は、発散定理

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{A}) dv = \int_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds \quad (112)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} N_j(x) \operatorname{grad} \varphi(x) \mathbf{n} ds \\ = \int_{\Omega} \operatorname{grad}(N_j(x)) \operatorname{grad} \varphi(x) dv \\ + \int_{\Omega} N_j(x) \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi(x)) dv \end{aligned} \quad (113)$$

となる。これを代入して書き換えて、

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \operatorname{grad}(N_j(x)) \operatorname{grad} \varphi(x) dv \\ + \int_{\Omega} k^2 N_j(x) \varphi(x) dv \\ = - \int_{\partial\Omega} N_j(x) \operatorname{grad} \varphi(x) \mathbf{n} ds \end{aligned} \quad (114)$$

である。この式を離散化、すなわち、

$$\varphi(x) = \sum_{i=1,4} \varphi_i N_i(x) \quad (115)$$

を代入して、

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1,4} \varphi_i \int_{\Omega} \operatorname{grad}(N_j(x)) \operatorname{grad}(N_i(x)) dv \\ + k^2 \sum_{i=1,4} \varphi_i \int_{\Omega} N_j(x) N_i(x) dv \\ = - \int_{\partial\Omega} N_j(x) \operatorname{grad} \varphi(x) \mathbf{n} ds \end{aligned} \quad (116)$$

となる。右辺は、境界条件を用いて離散化する。右辺については、隣り合う要素がある場合には、その2つの条件でキャンセルされる。従って、境

界条件

$$\alpha \varphi + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial n} = f \quad (117)$$

が課される場合のみを考える。ここで、

$$\frac{\partial}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \quad (118)$$

は同じことである。まず、 $\beta = 0$ の場合には、

$$\varphi = \frac{f}{\alpha} \quad (119)$$

である。すなわち、未知数は与えられた定数として方程式を解けばいい。次に、 $\beta \neq 0$ の場合には、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{f}{\beta} - \frac{\alpha \varphi}{\beta} \quad (120)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} - \int_{\partial\Omega} N_j(x) \operatorname{grad} \varphi(x) \mathbf{n} ds \\ = - \int_{\partial\Omega} N_j(x) \left(\frac{f}{\beta} - \frac{\alpha \varphi}{\beta} \right) ds \\ = - \int_{\partial\Omega} N_j(x) \left(\frac{f}{\beta} - \frac{\alpha \varphi}{\beta} \right) ds \end{aligned} \quad (121)$$

となる。ここで、

$$\varphi(x) = \sum_{i=1,4} \varphi_i N_i(x) \quad (122)$$

を代入すると、左辺は、

$$\begin{aligned} - \int_{\partial\Omega} N_j(x) \left(\frac{f}{\beta} - \frac{\alpha \varphi}{\beta} \right) ds \\ = - \frac{f}{\beta} \int_{\partial\Omega} N_j(x) ds \\ + \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i=1,4} \varphi_i \int_{\partial\Omega} N_j(x) N_i(x) ds \end{aligned} \quad (123)$$

となる。以上をまとめると、四面体の形状関数

$N_j(x)$ 、 $j = 1, 2, 3, 4$ に対して

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad}(N_j(x)) \operatorname{grad}(N_i(x)) dv \quad (124)$$

$$\int_{\Omega} N_j(x) N_i(x) dv \quad (125)$$

$$\int_{\partial\Omega} N_j(x) ds \quad (126)$$

$$\int_{\partial\Omega} N_j(x) N_i(x) ds \quad (127)$$

が計算できれば、 ϕ_i に関する離散化された方程式を得ることができる。

以下、 $N_j(x)$ を $N_j(x, y, z)$ と記述する場合もある。 $N_j(x)$ は四面体一次の形状関数であるので、

$$N_j(x, y, z) = a_j x + b_j y + c_j z + d_j \quad (128)$$

の形で表すことができる。この係数については、次のようにして求めることができる。形状関数の定義より、

$$N_j(x_i, y_i, z_i) = \delta_{ij} \quad (129)$$

である。ここで、 δ_{ij} はクロネッカの δ である。また、 (x_i, y_i, z_i) は四面体の頂点である。4つの頂点でそれぞれ4つの式が得られるため、この係数をすべて求めることができる。例えば、 $i=1$ については、

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 + d_1 &= 1 \\ a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 + d_1 &= 0 \\ a_1 x_3 + b_1 y_3 + c_1 z_3 + d_1 &= 0 \\ a_1 x_4 + b_1 y_4 + c_1 z_4 + d_1 &= 0 \end{aligned} \quad (130)$$

を解けばいい。また、これを利用して

$$\text{grad}(N_j(x)) = \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{pmatrix} \quad (131)$$

となる。以下、 V を Ω の体積、 S を $\partial\Omega$ の面積として、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{grad}(N_j(x)) \text{grad}(N_i(x)) dv \\ = (a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j) V \end{aligned} \quad (132)$$

$$\int_{\Omega} N_j(x) N_i(x) dv = \begin{cases} \frac{V}{10} & i = j \\ \frac{V}{20} & i \neq j \end{cases} \quad (133)$$

$$\int_{\partial\Omega} N_j(x) ds = \frac{1}{3} S \quad (134)$$

$$\int_{\partial\Omega} N_j(x) N_i(x) ds = \begin{cases} \frac{S}{6} & i = j \\ \frac{S}{12} & i \neq j \end{cases} \quad (135)$$

を得る。

5.2. 速度場での離散化

ここでは、速度場のある基礎方程式

$$\begin{aligned} (1 - M_x^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + (1 - M_y^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + (1 - M_z^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ - \left(2M_x M_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + 2M_y M_z \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \right. \\ \left. + 2M_z M_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} \right) \\ - 2ik \left(M_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + M_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + M_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + k^2 \phi = 0 \end{aligned} \quad (136)$$

を離散化する。

まず、第3項の

$$-2ik \left(M_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + M_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + M_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (137)$$

について述べる。 $-2ik$ を除いた部分について、四面体の形状関数 $N_j(x)$ 、 $j=1,2,3,4$ を乗じて、

$$\phi(x) = \sum_{i=1,4} \phi_i N_i(x) \quad (138)$$

を代入して、領域で積分する。形状関数は四面体1次であるため、1回微分は着目した領域全体で定数となることを利用して、次のように式変形できる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(M_x \frac{\partial N_j}{\partial x} N_j + M_y \frac{\partial N_j}{\partial y} N_j + M_z \frac{\partial N_j}{\partial z} N_j \right) dv \\ = M_x \frac{\partial N_j}{\partial x} \int_{\Omega} N_j dv + M_y \frac{\partial N_j}{\partial y} \int_{\Omega} N_j dv \\ + M_z \frac{\partial N_j}{\partial z} \int_{\Omega} N_j dv \end{aligned} \quad (139)$$

ここで、 $\int_{\Omega} N_j dv$ 等は解析的に求めることができるため、この式の離散化は完了である。

次に、第1項の

$$M_x^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + M_y^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + M_z^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (140)$$

について離散化する。上記と同様に四面体の形状関数 $N_j(x)$ 、 $j=1,2,3,4$ を乗じて、

$$\phi(x) = \sum_{i=1,4} \phi_i N_i(x)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(M_x^2 \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} N_j + M_y^2 \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} N_j + M_z^2 \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} N_j \right) dv \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(M_x^2 \frac{\partial N_j}{\partial x} N_j \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(M_x^2 \frac{\partial N_j}{\partial y} N_j \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(M_x^2 \frac{\partial N_j}{\partial z} N_j \right) \right) dv \\
&- \int_{\Omega} \left(M_x^2 \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + M_x^2 \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + M_z^2 \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dv \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} N_j + M_y^2 \frac{\partial N_j}{\partial y} N_j + M_z^2 \frac{\partial N_j}{\partial z} N_j \right) dv \\
&- M_x^2 \int_{\Omega} \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dv - M_y^2 \int_{\Omega} \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} dv \\
&- M_z^2 \int_{\Omega} \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} dv
\end{aligned} \tag{141}$$

である。従って、第 1 項は、

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} N_j + M_y^2 \frac{\partial N_j}{\partial y} N_j + M_z^2 \frac{\partial N_j}{\partial z} N_j \right) dv \\
&- M_x^2 a_j^2 - M_y^2 b_j^2 - M_z^2 c_j^2
\end{aligned} \tag{142}$$

となる。また、第 2 項

$$2M_x M_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + 2M_y M_z \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} + 2M_z M_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} \tag{143}$$

については

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(M_x M_y \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y} N_j + M_y M_z \frac{\partial^2 N_j}{\partial y \partial z} N_j \right. \\
&\quad \left. + M_z M_x \frac{\partial^2 N_j}{\partial z \partial x} N_j \right) dv \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(M_x M_y \frac{\partial N_j}{\partial y} N_j \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(M_y M_z \frac{\partial N_j}{\partial z} N_j \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(M_z M_x \frac{\partial N_j}{\partial x} N_j \right) \right) dv \\
&- \int_{\Omega} \left(M_x M_y \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + M_y M_z \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + M_z M_x \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dv \\
&= \int_{\Omega} \left(M_x M_y \frac{\partial N_j}{\partial y} N_j + M_y M_z \frac{\partial N_j}{\partial z} N_j + M_z M_x \frac{\partial N_j}{\partial x} N_j \right) dv \\
&- M_x M_y \int_{\Omega} \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} dv - M_y M_z \int_{\Omega} \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial z} dv \\
&- M_z M_x \int_{\Omega} \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial x} dv
\end{aligned} \tag{144}$$

である。従って、第 2 項は、

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(M_x M_y \frac{\partial N_j}{\partial y} N_j + M_y M_z \frac{\partial N_j}{\partial z} N_j + M_z M_x \frac{\partial N_j}{\partial x} N_j \right) dv \\
&- M_x M_y a_j b_j - M_y M_z b_j c_j - M_z M_x c_j a_j
\end{aligned} \tag{145}$$

で求めることができる。

5.3. 係数行列

次の式通りに係数行列を作成する。まず、行列の要素は、

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \\
&- \sum_{i=1,4} \phi_i \int_{\Omega} \text{grad}(N_j(x)) \text{grad}(N_i(x)) dv \\
&+ k^2 \sum_{i=1,4} \phi_i \int_{\Omega} N_j(x) N_i(x) dv
\end{aligned} \tag{146}$$

$$A_{ij} = A_{ij} + a_{ij} \tag{147}$$

である。次に、右辺項は

$$\begin{aligned}
b_i &= - \frac{f}{\beta} \int_{\Omega} N_j(x) ds \\
&+ \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i=1,4} \phi_i \int_{\Omega} N_j(x) N_i(x) ds \\
B_i &= B_i + b_i
\end{aligned} \tag{148}$$

となる。ここであらわれる積分は数値積分を一切利用することなく、すべて解析的に求めることのできる積分である。具体的なプログラミングにおいては、音響速度ポテンシャルは複素数であることに注意しなければならない。ここに述べたアルゴリズムにより、全体行列を作成することができた。

6. 連立方程式の解き方

ここまでで述べたアルゴリズムにより、音響解析の基礎方程式を

$$Ax = b \tag{150}$$

の複素数の連立一次方程式に帰着することができた。ただし、 A は節点数だけの次元を持つ複素数の 2 次元行列であるため、大規模な疎行列となる。通常節点数が数千万に及ぶ問題であっても、行列 1 行につき、非零要素は 100 個程度以下であり、スパース率は限りなく 100% に近い。非零要素の個数は、各節点に各要素を通して接続されて

節点数の数に等しい。また、 $\mathbf{b}$ は同様に節点数だけの次元を持つ複素数のベクトルである。

連立一次方程式を解く場合には、通常、直接法か反復法が利用される。直接法は、行列式が 0 でない限り、非常に条件の悪い行列でも解くことができるが、現在のハードウェアと数値計算技術では、数百万次元程度が限度である。また、その場合にも非常に多くの処理時間がかかる。一方、反復法は、ある方式で何回かの反復で収束させて解を求める方法である。従って、収束することが保証されているわけではないため、問題に応じていくつもの手法が研究され提案されている。音響解析の問題においては、ポテンシャル問題を解くため、ある程度行列の性質がよく、反復法でもある程度収束することが期待できる。ただし、複素係数の行列であるため、通常反復法のアルゴリズムで実数の内積をとる部分については、複素数と共役複素数との積をとることに注意しなければならない(そうしないと収束しない)。

本ソフトウェアでも、複素数の大規模疎行列用の反復法を利用する。その収束性については十分に注意しなければならない。次の記事において、いくつかの反復法を、いくつかのメッシュ形状に対して適用し、Advance/FrontNoise で推奨する最適な手法を選択した過程について示す。

7. 境界要素法による離散化 (参考資料)

7.1. 概要

現状の本ソフトウェアでは利用していないが参考までに、初期の音響解析ソフトウェアで利用していた境界要素法の定式化について述べる。

まず、Helmholtz 方程式から導かれた速度ポテンシャルに関する次のような境界上の積分方程式

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} ds_y + \varphi(x) \\ = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial n} G(x, y) ds_y \end{aligned} \quad x \in \Omega \quad (151)$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} ds_y + \frac{1}{2} \varphi(x) \\ = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial n} G(x, y) ds_y \end{aligned} \quad x \in \partial\Omega \quad (152)$$

から出発し、これを、Helmholtz の積分作用素で書き直し、Helmholtz の積分作用素を離散化することで、解を求める。

7.2. 利用する要素

本システムでは、3次元解析のみを取り扱っていた。従って、表面を近似する図形は、三角形要素のみを利用する。三角形の重心で、速度ポテンシャルを定義する。速度ポテンシャルの定義された位置で、圧力、速度も定義される。

7.3. 積分方程式の変形

7.3.1. 内部問題

Helmholtz の積分作用素を次のように定義する。

$$\{L_k \varphi\}_\Gamma(x) = \int_\Gamma G_k(x, y) \varphi(y) ds_y \quad (153)$$

$$\{M_k \varphi\}_\Gamma(x) = \int_\Gamma \frac{\partial G_k}{\partial n}(x, y) \varphi(y) ds_y \quad (154)$$

$$\{M_k^t \varphi\}_\Gamma(x; u) = \frac{\partial}{\partial u} \int_\Gamma G_k(x, y) \varphi(y) ds_y \quad (155)$$

$$\{N_k \varphi\}_\Gamma(x; u) = \frac{\partial}{\partial u} \int_\Gamma \frac{\partial G_k}{\partial n}(x, y) \varphi(y) ds_y \quad (156)$$

ここで、 x は領域 Ω の点であり、 y は境界 Γ 上の点である。 n は外向き法線ベクトルであり、 u は任意の方向のベクトルである。これらの作用素を利用して、先に示した

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \frac{\partial G_k(x, y)}{\partial n} ds_y + \frac{1}{2} \varphi(x) \\ = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial n} G_k(x, y) ds_y \end{aligned} \quad x \in \partial\Omega \quad (157)$$

を解く。まず、Helmholtz の積分作用素を利用して積分方程式を書き換えると、

$$\{M_k \varphi\}_{\partial\Omega}(x) + \frac{1}{2} \varphi(x) = \left\{ L_k \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\}_{\partial\Omega}(x) \quad (158)$$

$$\left\{ \left(M_k + \frac{1}{2} I \right) \varphi \right\}_{\partial\Omega} (x) = \left\{ L_k \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\}_{\partial\Omega} (x) \quad (159)$$

と書くことができる。ここで、

$$v(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} \quad (160)$$

とおいた。また、上の積分方程式を、 $x \in \partial\Omega$ において法線方向 n_x に微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_x} \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \frac{\partial G_k(x, y)}{\partial n} ds_y + \frac{1}{2} v(x) \\ = \frac{\partial}{\partial n_x} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial n} G_k(x, y) ds_y \end{aligned} \quad x \in \partial\Omega \quad (161)$$

である。これを、Helmholtz の積分作用素を利用して積分方程式を書き換えると、

$$\{N_k \varphi\}_{\partial\Omega}(x; n_x) + \frac{1}{2} v(x) = \{M_k^t v\}_{\partial\Omega}(x; n_x) \quad (162)$$

$$\{N_k \varphi\}_{\partial\Omega}(x; n_x) = \left\{ \left(M_k^t - \frac{1}{2} I \right) v \right\}_{\partial\Omega}(x; n_x) \quad (163)$$

と書くことができる。この 2 つの式を coupling parameter μ で加えると、

$$\begin{aligned} \left\{ \left(M_k + \frac{1}{2} I + \mu N_k \right) \varphi \right\}_{\partial\Omega} (x; n_x) \\ = \left\{ \left(L_k + \mu \left(M_k^t - \frac{1}{2} I \right) \right) v \right\}_{\partial\Omega} (x; n_x) \end{aligned} \quad (164)$$

となる。

7.3.2. 外部問題

内部問題と外部問題とでは、外向き法線の方向が異なるため、

$$\begin{aligned} \left\{ \left(M_k - \frac{1}{2} I + \mu N_k \right) \varphi \right\}_{\partial\Omega} (x; n_x) \\ = \left\{ \left(L_k + \mu \left(M_k^t + \frac{1}{2} I \right) \right) v \right\}_{\partial\Omega} (x; n_x) \end{aligned} \quad (165)$$

を解くことになる。

7.4. 離散化

内部問題も外部問題も同様であるため、ここでは、内部問題に限って、離散化を進める。外部問

題についてもまったく同様に離散化可能である。離散化すべき式は、

$$\begin{aligned} \left\{ \left(M_k + \frac{1}{2} I + \mu N_k \right) \varphi \right\}_{\partial\Omega} (x; n_x) \\ = \left\{ \left(L_k + \mu \left(M_k^t - \frac{1}{2} I \right) \right) v \right\}_{\partial\Omega} (x; n_x) \end{aligned} \quad (166)$$

である。まず、領域の境界 $\partial\Omega$ を、 n 個の三角形に分割する。 n 個の三角形を s_i とする。三角形の重心 x_i において、定義される速度ポテンシャル φ

を φ_i 、その微分 $v \left(= \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)$ を v_i とする。まず、離

散化すべき式は、境界全体での積分のため、

$$\begin{aligned} \left\{ \left(M_k + \frac{1}{2} I + \mu N_k \right) \varphi \right\}_{\sum s_j} (x; n_x) \\ = \left\{ \left(L_k + \mu \left(M_k^t - \frac{1}{2} I \right) \right) v \right\}_{\sum s_j} (x; n_x) \end{aligned} \quad (167)$$

となる。これは、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left\{ \left(M_k + \frac{1}{2} I + \mu N_k \right) \varphi \right\}_{s_j} (x; n_x) \\ = \sum_{j=1}^n \left\{ \left(L_k + \mu \left(M_k^t - \frac{1}{2} I \right) \right) v \right\}_{s_j} (x; n_x) \end{aligned} \quad (168)$$

と同値である。これは、すべての x_i について成り立つ。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left\{ \left(M_k + \frac{1}{2} I + \mu N_k \right) \varphi \right\}_{s_j} (x_i; n_{x_i}) \\ = \sum_{j=1}^n \left\{ \left(L_k + \mu \left(M_k^t - \frac{1}{2} I \right) \right) v \right\}_{s_j} (x_i; n_{x_i}) \end{aligned} \quad (169)$$

ここで、作用素はすべて線形であることを思い出すとつぎのように変形できる。例えば、 L_k は次のように離散化する。 L_k に関連する項は

$$\sum_{j=1}^n L_k v_{s_j} (x_i; n_{x_i}) \quad (170)$$

であり、

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n L_k v_{S_j}(x_i; n_{x_i}) \\
&= \sum_{j=1}^n \int_{S_j} G_k(x_i, y) v(y) ds_y \quad (171) \\
&= \sum_{j=1}^n v(x_j) \int_{S_j} G_k(x_i, y) ds_y
\end{aligned}$$

と書き換えることができる。これを

$$\sum_{j=1}^n v(x_j) [L_k e\}_{S_j}(x_i)] \quad (172)$$

$$\{L_k e\}_{S_j}(x_i) = \int_{S_j} G_k(x_i, y) ds_y \quad (173)$$

と書く。作用素をこの離散的な作用素として次の通り定義する。

$$\{L_k e\}_{S_j}(x) = \int_{S_j} G_k(x, y) ds_y \quad (174)$$

$$\{M_k e\}_{S_j}(x) = \int_{S_j} \frac{\partial G_k}{\partial n}(x, y) ds_y \quad (175)$$

$$\{M_k^t e\}_{S_j}(x; u) = \frac{\partial}{\partial u} \int_{S_j} G_k(x, y) ds_y \quad (176)$$

$$\{N_k e\}_{S_j}(x; u) = \frac{\partial}{\partial u} \int_{S_j} \frac{\partial G_k}{\partial n}(x, y) ds_y \quad (177)$$

これらの記号を用いて、

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \varphi(x_j) \left[\{M_k e\}_{S_j}(x_i) + \frac{1}{2} I \right] \\
& \quad + \mu \{N_k e\}_{S_j}(x_i) \\
&= \sum_{j=1}^n v(x_j) \left[\{L_k e\}_{S_j}(x_i) \right. \\
& \quad \left. + \mu \left(\{M_k^t e\}_{S_j}(x_i) - \frac{1}{2} I \right) \right] \quad (178)
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $[A]_{ij}$ を行列 A の ij 要素として、

$$[L_k]_{ij} = \{L_k e\}_{S_j}(x_i) = \int_{S_j} G_k(x_i, y) ds_y \quad (179)$$

$$[M_k]_{ij} = \{M_k e\}_{S_j}(x_i) = \int_{S_j} \frac{\partial G_k}{\partial n}(x_i, y) ds_y \quad (180)$$

$$[M_k^t]_{ij} = \{M_k^t e\}_{S_j}(x_i) = \frac{\partial}{\partial n_i} \int_{S_j} G_k(x_i, y) ds_y \quad (181)$$

$$[N_k]_{ij} = \{N_k e\}_{S_j}(x_i) = \frac{\partial}{\partial n_i} \int_{S_j} \frac{\partial G_k}{\partial n}(x_i, y) ds_y \quad (182)$$

を利用すると、

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \varphi(x_j) \left[M_k + \frac{1}{2} I + \mu N_k \right] \\
&= \sum_{j=1}^n v(x_j) \left[L_k + \mu \left(M_k - \frac{1}{2} I \right) \right] \quad (183)
\end{aligned}$$

に書き換えることができる。ここで、未知数は $\varphi(x_j)$ と $v(x_j)$ であり、その係数はすべて計算できる量である。この式と境界条件

$$\begin{aligned}
& \alpha(x_j) \varphi(x_j) + \beta(x_j) \frac{\partial \varphi(x_j)}{\partial n_j} \quad \text{on } \partial \Omega \quad (184) \\
&= f(x_j)
\end{aligned}$$

を合わせて解く。式は $2n$ あり、変数の数も $2n$ ある。

7.5. グリーン関数の境界上の積分について

離散化であわられる4つのタイプのグリーン関数の積分について、その計算上の注意に関して述べる。

$$\int_{S_j} G_k(x_i, y) ds_y \quad (185)$$

$$\int_{S_j} \frac{\partial G_k}{\partial n}(x_i, y) ds_y \quad (186)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \int_{S_j} G_k(x_i, y) ds_y \quad (187)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \int_{S_j} \frac{\partial G_k}{\partial n}(x_i, y) ds_y \quad (188)$$

このうち連続関数になるものはそのまま、通常の積分を行えばいい。

7.6. 行列解法

周波数毎に次のような方程式を解く。解くべき方程式は、

$$\begin{aligned}
& A\varphi = Bv, \\
& A, B \in R^n \times R^n \\
& c \in R^n \\
& \varphi, v \in R^n \quad (189)
\end{aligned}$$

$$\alpha_i \varphi_i + \beta_i v_i = f_i, \quad (i=1, n) \quad (190)$$

の形式である。ここで、 α_i と β_i は固定したすべての i に対して、同時には0とはならない。また、

incident field がある場合には、第一式は、

$$\begin{aligned} A\varphi &= B\nu + c \\ A, B &\in R^n \times R^n \\ c &\in R^n \\ \varphi, \nu &\in R^n \end{aligned} \quad (191)$$

と書くことができる。第2式を利用して、変数を削除することで、全体の変数の数を n 個にしてから、通常の n 次元の連立方程式を解く。行列は、密行列になることに注意する。この行列は、密行列用の LU 分解を利用して解く。ここで、

$$A = (A_{ij}) = \left([M_k]_{ij} + \frac{1}{2}\delta_{ij} + \mu[N_k]_{ij} \right) \quad (192)$$

$$B = (B_{ij}) = \left([L_k]_{ij} + \mu \left([M_k]_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij} \right) \right) \quad (193)$$

である。また、対角行列 C 、 D を、

$$C = (C_{ij}) = (\alpha_i \delta_{ij}) \quad (194)$$

$$D = (D_{ij}) = (\beta_i \delta_{ij}) \quad (195)$$

$$\varphi = (\varphi_i) = (\varphi(x_i)) \quad (196)$$

$$\nu = (\nu_i) = (\nu(x_i)) \quad (197)$$

として定義する。従って、解くべき方程式は、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \quad (198)$$

と書くことができる。 α_i と β_i は固定したすべての i に対して、同時には 0 とはならないことを利用して、 $\begin{pmatrix} \varphi \\ \nu \end{pmatrix}$ を入れ替えることで、対角要素が非零の D' を作ることができる（数値的な安定性を考慮して、実際には、絶対値の大きい要素を D' の対角となるように入れ替える）。行列は、列を入れ替えることに相当し、解および荷重ベクトルは行を入れ替える。このようにして、逆行列を持つ D' に対して、

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi' \\ \nu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} \quad (199)$$

とできる。これを書き換える。 $C'\varphi' + D'\nu' = g'$ を $\nu' = D'^{-1}(g' - C'\varphi')$ と書き換えて、

$$A'\varphi' + B'D'^{-1}(g' - C'\varphi') = f' \quad (200)$$

となるため、

$$(A' - B'D'^{-1}C')\varphi' = f' - B'D'^{-1}g' \quad (201)$$

を得る。これは、 n 次元の密行列から構成せれる方程式であり、本シミュレーションでは、この式を解くことにする。

7.7. 領域内での求解

ここまでの手順で、境界上の x ($x \in \partial\Omega$) に対して、 $\varphi(x)$ と $\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}$ を求めることができた。これを利用して、その境界で囲まれる領域内の x ($x \in \Omega$) に対して、 $\varphi(x)$ の値を求める手順について示す。境界上の積分方程式

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} ds_y + \varphi(x) \\ = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial n} G(x, y) ds_y \end{aligned} \quad x \in \Omega \quad (202)$$

を利用して、

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial n} G(x, y) ds_y \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} ds_y \end{aligned} \quad (203)$$

を基本の式とする。Helmholtz の積分作用素を利用して式を書き換えると、

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_{\sum s_j} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial n} G(x, y) ds_y - \int_{\sum s_j} \varphi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} ds_y \\ &= \sum_j \int_{s_j} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial n} G(x, y) ds_y - \sum_j \int_{s_j} \varphi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} ds_y \\ &= \sum_j \nu_j \int_{s_j} G(x, y) ds_y - \sum_j \varphi_j \int_{s_j} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} ds_y \end{aligned} \quad (204)$$

となる。ここで、右辺の ν_j, φ_j はすべて計算された既知の量であり、被積分関数が積分領域で有界となっている $\int_{s_j} G(x, y) ds_y, \int_{s_j} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} ds_y$ については、通常に積分することで求めることができる。従って、計算された境界の ν_j, φ_j から、任意の点の解が求まったことになる。実際には、この任意の点は、ユーザーが指定した面や領域での計算となる。

8. おわりに

音響解析ソフトウェア Advance/FrontNoise はここで述べたようなアルゴリズムにより、音響解析を行っている。音響解析の計算原理自体は、確立された技術だといっていい。ただし、計算機の発達により、数値計算の対象はより広がってきた。今後、より多くのニーズに対応するため、いろいろな対象を計算するためのモデルを取り入れていく必要がある。

また、数値計算技術に関して、本ソフトウェアは大規模計算のための工夫を随所で行っており、そのための最新のアルゴリズムはすべて取り入れている。しかし、大規模疎行列の研究をはじめとした大規模計算技術の進歩は速く、開発を継続しながら、今後とも、最新の研究手法を取り入れた実用的なソフトウェアとして発展させていく予定である。

参考文献

- [1] 桑原匠史, “Advance/FrontNoise を用いた音響解析”, アドバンスシミュレーション Vol.2, 2010.9
- [2] 松原聖, 桑原匠史, “Advance/FrontNoise による大規模解析”, アドバンスシミュレーション Vol.9, 2011.10
- [3] 松原聖, “Advance/FrontNoise による大規模解析—続報—”, アドバンスシミュレーション Vol.13, 2012.10
- [4] 松原聖, 戸田則雄, “Advance/FrontNoise による構造音響および流体音響連成解析”, アドバンスシミュレーション Vol.14, 2013.1
- [5] M.S.Howe, "Theory of Vertex Sound ", Cambridge, 2003
- [6] P.M.Morse, K.U.Ingard, "Theoretical Acoustics", prenceton University Press, 1986
- [7] 鈴木昭次, 西村正治ら, “機械音響工学”, コロナ社, 2004