

非線形弾性力学の現状と構造解析ソフトウェア Advance/FrontSTR 内の実装

袁 熙*

Implementation of Nonlinear Elasticity in Advance/FrontSTR

Xi YUAN*

弾性力学は、連続体力学の基礎であり、Advance/FrontSTR の基礎でもある。本稿では、非線形弾性理論の現状を整理し、その問題点と Advance/FrontSTR における課題を議論することより、Advance/FrontSTR の開発の理論根拠を提供するものである。

Key word: Cauchy elasticity, Green elasticity, hypoelasticity, hyperelasticity, entropic elasticity

1. はじめに

一般的には、弾性とは外力を加えると変形するが、除荷すれば元の寸法に戻る性質をいう。この性質は数学的に定義することより、弾性構成式の構築することが可能になる。しかし、現実ではこのような性質を利用しない定義もある。例えば Truesdell & Noll [1] は変形履歴の影響がなく現時点の配置にしか依存しない、または単純（変形勾配のみの関数である）材料は弾性材と定義している。しかし、上記両定義は実は整合性がなく、しばしば議論される。この点に対するわれわれの見解を示すことが本文の主な目的である。

本稿は、まず材料構成式を構築する時の必要な制約条件について議論し、続いて、現在よく使われている非線形弾性構成式についてまとめる。最後に当社で開発・販売している構造解析ソフトウェア Advance/FrontSTR 内の非線形弾性解析の実装方法を紹介し、これらの実装を利用する際の注意事項を提起する。

また、熱や電磁場と弾性変形の関連を論じると非線形弾性変形現象の幅が広がるが、本稿は単純な力学変形に限定する。

本稿の記法の多くは文献[5]示しており、その詳細はその文献を参照されたい。

2. 材料構成式に対する制約条件

材料の構成則を構築する場合には、座標系に依存しないという客観性法則と熱力学の法則を満足しなければならない。この節ではこれらの制約条件を議論する。

2.1. 熱力学第一法則：エネルギー保存則

物質は現配置 Ω に作用する全エネルギーは内部エネルギー E と運動エネルギー K の和であり、その物質時間変化率（本稿では上付き $\cdot$ と示している）は外力による仕事率 W や熱流束による仕事率 Q は等しい。これを熱力学の第一法則と呼ぶ。

$$\overline{E(\Omega) + K(\Omega)} = W(\Omega) + Q(\Omega) \quad (1)$$

ここでは

$$E(\Omega) = \int_{\Omega} \rho a d\Omega \quad (2)$$

$$K(\Omega) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (3)$$

$$W(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (4)$$

$$Q(\Omega) = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{q} d\Omega \quad (5)$$

であるから、エネルギー保存状態は

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) d\Omega = & - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{q} d\Omega \\ & + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega \end{aligned} \quad (6)$$

*アドバンスソフト株式会社 第1事業部
Computational Science and Engineering Division I,
AdvanceSoft Corporation

と表される。ここでは ρ は質量、 ε は単位質量の内部エネルギー、 $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力、 $\mathbf{b}$ は体積力、 $\mathbf{v}$ は速度、 $\mathbf{q}$ は熱流量、 $\mathbf{n}$ は境界面の法線方向である。この式に対して、Reynold の輸送定理や Gauss の定理を用いて整理すると[5]

$$\int_{\Omega} \left(\rho \dot{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \nabla \cdot \mathbf{q} - q \right) d\Omega = 0 \quad (7)$$

となる。上式は任意の領域において成立するため

$$\rho \dot{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \nabla \cdot \mathbf{q} - q = 0 \quad (8)$$

が成り立つ。これは連続体のエネルギー保存則である。この式は基準配置 Ω_0 における式は以下である。

$$\dot{\varepsilon}_R - \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + \nabla \cdot \mathbf{q}_R - q_R = 0 \quad (9)$$

ここで $\varepsilon_R = \rho \varepsilon$, $\mathbf{q}_R = J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{q}$, $q_R = J q$ である[2]。

2.2. 熱力学第二法則：エントロピー増大の法則

物質は現配置 Ω における総エントロピーの変化

は内部エントロピーの生成率 $\dot{S}(\Omega)$ やエントロピー外部への流束 $J(\Omega)$ からとなり、その値は非負である。

$$H(\Omega) = \dot{S}(\Omega) - J(\Omega) \geq 0 \quad (10)$$

ここでは

$$S(\Omega) = \int_{\Omega} \rho \eta d\Omega \quad (11)$$

$$J(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} j d\Omega \quad (12)$$

また、エントロピー流束 $\mathbf{j}$ と絶対温度 θ の関係式は

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{q}}{\theta} \quad (13)$$

であり、これらの式を式(10)に代入すると

$$\int_{\Omega} \rho \dot{\eta} d\Omega \geq - \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{q}{\theta} d\Omega \quad (14)$$

となり、これは Clausius-Duhem 不等式と呼ぶ。この式に対して、Reynold の輸送定理や Gauss の定理を用いて整理し、さらにこの式は任意の領域において成立する条件を考慮すると、

$$\rho \dot{\eta} \geq - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) + \frac{q}{\theta} \quad (15)$$

が得られる。ここで、式(8)を考慮し

$$\begin{aligned} & - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) + \frac{q}{\theta} \\ &= \frac{1}{\theta} (- \nabla \cdot \mathbf{q} + q) + \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \\ &= \frac{1}{\theta} \left(\rho \dot{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \right) \end{aligned} \quad (16)$$

が得られるため

$$\rho \left(\dot{\varepsilon} - \theta \dot{\eta} \right) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \leq 0 \quad (17)$$

が成り立ち。実用上、specific entropy η の代わりに、Helmholtz 自由エネルギー ψ はよく使われる

$$\psi := \varepsilon - \theta \eta \quad (18)$$

この式(16)は以下のように変換される。

$$\rho \left(\dot{\psi} + \eta \dot{\theta} \right) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \leq 0 \quad (19)$$

特に、温度の分布や変化を考慮しない単純力学問題(等温 Isothermal 過程)に対して

$$\rho \dot{\psi} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \leq 0 \quad (20)$$

この式は基準位置 Ω_0 における式は以下である。

$$\dot{\psi}_R - \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \leq 0 \quad (21)$$

ここで、 $\psi_R = \rho \psi = \varepsilon_R - \theta \eta_R$, $\mathbf{P}$ は Kirchhoff 応力, $\mathbf{F}$ は変形勾配テンソルである。

2.3. 客観性条件

本部では、式(22)に示したように自由エネルギーは変形勾配 $\mathbf{F}$ のみの関数という単純材料について議論を行う。

$$\psi_R = \hat{\psi}_R(\mathbf{F}) \quad (22)$$

上記の構成式は座標系に依存しない。客観性条件を満たさなければならず、次式が成立することが必要とする。

$$\hat{\psi}_R(\mathbf{F}) = \hat{\psi}_R(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}) \quad (23)$$

ここで $\mathbf{Q}$ は回転を表す直交テンソルである。さらに変形勾配の極分解式 $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ を利用し、任意な $\mathbf{Q}$ は $\mathbf{R}^T$ と一致する場合

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U} \quad (24)$$

が得られるので、式(23)は以下のように変形できる。

$$\hat{\psi}_R(\mathbf{F}) = \hat{\psi}_R(\mathbf{U}) \quad (25)$$

この式は関数 $\hat{\psi}$ が客観性を有するための必須条件である。さらに、 $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$ を利用し、式(23)は

$$\bar{\psi}_R(\mathbf{C}) = \hat{\psi}_R(\sqrt{\mathbf{C}}) \quad (26)$$

になる。この式を利用し、自由エネルギー時間変化率は

$$\bar{\psi}_R = \frac{\partial \bar{\psi}_R}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} \quad (27)$$

となり、さらに

$$\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}} \quad (28)$$

であるため、式(21)は

$$\left(2 \frac{\partial \bar{\psi}_R}{\partial \mathbf{C}} - \mathbf{S} \right) : \dot{\mathbf{C}} \leq 0 \quad (29)$$

となる。この式は任意な $\dot{\mathbf{C}}$ に対する成立するという条件と $\mathbf{S}$ と $\mathbf{C}$ の対称性や $\bar{\psi}_R$ の極小値近くの正定性条件から、第2Piola-Kirchhoff応力 $\mathbf{S}$ は下記のように自由エネルギーから求めることが要請される([2]p279)。

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \bar{\psi}_R}{\partial \mathbf{C}} \quad (30)$$

3. 非線形弾性

一般的には、弾性とは外力を加えると変形するが、除荷すれば元の寸法に戻る性質をいう。厳密に言えば、除荷した場合の物質の総エントロピーの、変化しないという性質ともいえる、すなわち、式(19)の代わりに

$$\rho \left(\dot{\psi} + \eta \dot{\theta} \right) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta = 0 \quad (31)$$

を満足する性質を持つ。

弾性材料の構成式は式(30)の形式になるべきと議論したが、現状では式(30)以外の式も利用されている。本章では、これらの弾性構成式を議論する。

3.1. Cauchy 弾性

Cauchy弾性体はCauchy応力 $\boldsymbol{\sigma}$ が現時刻での変形

勾配 $\mathbf{F}$ のみに依存し、式(32)のように定めた物質と定義する。

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = f(\mathbf{F}(t)) \quad (32)$$

上記の構成式は座標系に依存しない。客観性条件を満たさなければならず、次式が成立することが必要とする。

$$\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T = f(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}) = \hat{f}(\mathbf{C}) \quad (33)$$

ここで式(24)を利用した。特に、弾性体は等方である場合

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T = \hat{f}(\mathbf{C}) \quad (34)$$

が得られる。

Cayley-Hamilton理論によるとテンソル関数 $\mathbf{D} = f(\mathbf{A})$ では、 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{D}$ は等方テンソルの必要十分条件は $\mathbf{D}$ が下記のように展開できることである(例え[2,p32])

$$\mathbf{D} = \varphi_0 \mathbf{I} + \varphi_1 \mathbf{A} + \varphi_2 \mathbf{A}^2 + \dots \varphi_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} \quad (35)$$

ただし、 φ_i は $\mathbf{A}$ の不変量である。

この性質を式に代入すると：

$$\boldsymbol{\sigma} = \varphi_0 \mathbf{I} + \varphi_1 \mathbf{C} + \varphi_2 \mathbf{C}^2 \quad (36)$$

が得られる。

Cauchy弾性は第2節に紹介した熱力学法則を満足する保証がない。例え任意のサークル変形の場合、応力とひずみは初期状態の戻っても、余計なエネルギーの生成することもあり得る。しかし、下記超弾性と比べ、Cauchy弾性構成式から実験データから取りやすいや解析の利便性があり([3],p493)、採用されている。

3.2. Green 弾性、超弾性

Green弾性体、または超弾性(hyperelasticity)とは、式(30)のように変形やひずみの成分によって微分されることにより共役な応力成分を求めようとする弾性ポテンシャル関数 ψ が存在する物質として定義される。

超弾性は第2節に紹介した熱力学法則を満足する。

超弾性構成式の構築は弾性ポテンシャル関数 ψ

の構築となる。弾性ポテンシャル関数 ψ は客観性を満足する他、いくつかの物理的な条件を満足する必要もある ([3],p494)。例えば、

- ・弾性ポテンシャル関数 ψ は凸関数である。
- ・極端ひずみ条件：右Cauchy-Greenテンソル $\mathbf{C}$ の固有値は0や ∞ の時、応力が無限大であるなどがある。これらの条件により、弾性ポテンシャル関数 ψ の選択をする。さらに、材料の等方性を考慮すると、 ψ は右Cauchy-Green変形テンソル $\mathbf{C}$ の主不変量(I_1, I_2, I_3)または体積変化成分を除いた右Cauchy-Green変形テンソル $\bar{\mathbf{C}}$ の主不変量($\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$) (つまり、 $\psi = \psi(I_1, I_2, I_3)$ 、あるいは $\psi = \psi(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3)$) として表すことができる。

Advance/FrontSTRは多数な弾性ポテンシャル関数 ψ に対応しており、その詳細を文献[5]を参照されたい。

3.3. 歪弾性

歪弾性(hypoelasticity)体の構成式は式(37)に示したように応力の時間微分 $[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]$ の形になっている。ただし、応力の時間微分は時間スケールと依存せず、または $\mathbf{L}=0$ の近傍に f は $\mathbf{L}$ に対する連続微分可能である。

$$[\dot{\boldsymbol{\sigma}}] = f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{L}) \quad (37)$$

$[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]$ が時間スケールと依存しない条件は

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha \mathbf{L}) = \alpha f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{L}), \forall \alpha \in \text{実数} \quad (38)$$

であり、すなわち f は $\mathbf{L}$ の正定同次関数である。また、 $\mathbf{L}=0$ の近傍に f は $\mathbf{L}$ に対する連続微分可能と仮定しているため、 f は $\mathbf{L}$ の線形関数になる ([1].p403)

$$[\dot{\boldsymbol{\sigma}}] = f(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{L} \quad (39)$$

応力の時間微分 $[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]$ の定義は変形に伴う座標系の変更や変形回転に伴う座標系に依存しないという客観性原理を満足する必要がある、代表的には以下である：

- ・Jaumann 速度($[\dot{\boldsymbol{\sigma}}] = \boldsymbol{\sigma}^{\nabla J}$)

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{w} \bullet \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{w} \quad (40)$$

ここで、 $\mathbf{w}$ はスピテンソルである。Advance/FrontSTRはJaumann速度を採用している。

- ・Truesdell 速度($[\dot{\boldsymbol{\sigma}}] = \boldsymbol{\sigma}^{\nabla T}$)

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla T} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \text{div}(\mathbf{v})\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{l} \bullet \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{l}^T \quad (41)$$

- ・Green-Naghdi 速度($[\dot{\boldsymbol{\sigma}}] = \boldsymbol{\sigma}^{\nabla G}$)

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla G} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\Omega} \bullet \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\Omega}^T \quad (42)$$

ここで、 $\boldsymbol{\Omega}$ は主軸系におけるスピテンソルである。

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \quad (43)$$

- ・対数速度

この定義は下記の Hencky(logarithmic Eulerian)ひずみテンソルを利用している。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Hencky}} := \ln \mathbf{V} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{B} = \mathbf{n}(\ln \boldsymbol{\Lambda})\mathbf{n}^T \quad (44)$$

ここで、 $\boldsymbol{\Lambda}$ と $\mathbf{n}$ は左ストレッチテンソル $\mathbf{V}$ の主不変量と主不変量方向である。その時間微分は

$$\overset{\circ}{\ln \mathbf{V}} = \ln \dot{\mathbf{V}} - \boldsymbol{\Omega}^{\log} \ln \mathbf{V} + (\ln \mathbf{V})\boldsymbol{\Omega}^{\log} \quad (45)$$

であり、応力の対数速度は

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla L} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\Omega}^{\log} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\Omega}^{\log} \quad (46)$$

と定義される。

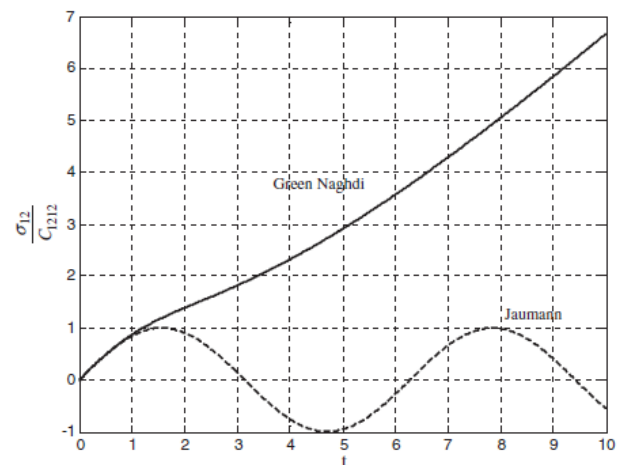


図1 単純せん断変形の
せん断応力—せん断ひずみ曲線

これらの式で定義した応力速度全てを式(39)に代入すると、材料の構成式が得られる。しかし、異なる応力速度関数と関数 $f(\boldsymbol{\sigma})$ の組み合わせから複数な構成式が得られる。理論的には正しい構成式は1つしかなく、実測データとの比較が必要であるが、その比較自体は困難であるため、事実上線形弾性係数をそのまま利用するケースはほとんどである。その結果、しばしば非現実的な結果

が得られる。図 1 では均一な単純せん断変形を受ける変形体のせん断応力-ひずみ曲線を示している。ここで、Jaumann 速度と Green-Naghdi 速度を利用した結果を示しているが、Jaumann 速度から得られた応力が振動し、考えにくい結果が得たことを示している。

また、亜弾性は 2 節に紹介した熱力学法則を満足する保証がない。その結果、例えば、外力を加えると変形するが、除荷すれば余分なひずみが残すことがある[8]。

亜弾性の応用の多くは弾塑性や粘塑性変形解析に使うことである。1つの方法としては、弾塑性モデルは変形速度テンソル $\mathbf{d}$ を弾性成分と塑性成分に加算分解すると $\mathbf{d} = \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_p$ 、構成式は $[\dot{\boldsymbol{\sigma}}] = f(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{d}_e$ のような亜弾性形式になる。上記指摘した亜弾性の問題点を回避するため、Simo[6] は弾塑性変形の乗算分解を提案し、亜弾性モデルを利用しないようにした。もう 1つの方法としては、上記指摘した応力の振動がなく、熱力学法則も満足できる亜弾性モデルを求めることである。その成果の 1つは応力の対数速度を使うことである[7]。

3.4. その他

3.1~3.3 節では、弾性構成式をそれぞれ代数形式 (Cauchy 弾性)、積分形式 (Green 弾性) や微分形式 (亜弾性) と分類し、その他、弾性構成式は陰的な形式 $\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{F}) = \mathbf{0}$ を表す方法[9]もあるが、その実用性はまだ不明である。

また、上記弾性構成式の形式以外、変形の微細領域の物理的な特徴による分類法もある。ポリマーのような材料の変形では、内部エネルギー ε の変化はほとんどなく、変形は内部エントロピー η の変化によるものである。このような材料はエントロピー弾性材 (entropic elasticity)[4] と呼ぶ。これを対し、変形は内部エネルギーの変化によるものである場合 energetic elasticity と呼ぶ。エントロピー弾性体の変形は温度の変化を伴い、変形体内のエントロピーは弾性ポテンシャルの一部になる。その詳細について関連文献[4]を参照されたい。

4. 構造解析ソフトウェア Advance/FrontSTR での実装

これまで述べた非線形弾性モデルについて、Advance/FrontSTR 内の実装状況は以下である：

- Cauchy 弾性：実装なし
- Green 弾性：実装あり
- 亜弾性：弾塑性材料と粘塑性材料の弾性的な挙動は Jaumann 速度を利用した亜弾性モデルを使われている。

この節では、Advance/FrontSTR 内亜弾性、超弾性材の実装方法や使用上における注意事項について述べる。

4.1. Total Lagrange と Update Lagrange 法

Advance/FrontSTR は幾何非線形を処理するため、Total Lagrange 法と Update Lagrange 法が実装している。両方法とも使われている座標系は違うが、適切な座標変換より互いに変換でき、等価である。そのため、どちらの方法を使っても問題ないが、Advance/FrontSTR は利便性を考慮した実装をしている。

Total Lagrange法では、時刻0の初期配置を基準とする時刻 t_{n+1} での内部仮想仕事の式を用いる[5]。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \mathbf{S}_{n+1} : \delta \mathbf{E} d\Omega_0 \\ &= \int_{\Gamma_0} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \delta \mathbf{v} d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega_0 \end{aligned} \quad (47)$$

ただし、 $\mathbf{S}$ と $\mathbf{E}$ は時刻 0 の初期配置を基準とする時刻 t_{n+1} の第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソルと Green-Lagrange ひずみテンソルを表す。また、 $\mathbf{t}_0$ は公称表面力ベクトル、 $\rho_0 \mathbf{b}$ は初期配置の単位体積当りに換算した物体力ベクトルである。

この式の実装は第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソル $\mathbf{S}$ を用いた構成式が必要となるが、Green 弾性材の構成式は式(30)に示したように $\mathbf{S}$ を用いた構成式であるため、Advance/FrontSTR 内の Green 弾性体の変形計算は Total Lagrange 法を利用している。

一方、Updated Lagrange法を採用する場合には、時刻 t_n の現配置を参照配置とする時刻 t_{n+1} での内部仮想仕事式を用いる[5]。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_n} \dot{\mathbf{S}}_n : \delta \mathbf{E}_n d\Omega + \int_{\Omega_n} \boldsymbol{\sigma}_n : (\delta \mathbf{E}_n) d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_0} \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \delta \mathbf{v} d\Gamma_n + \int_{\Omega_n} \rho_{n+1} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega_n \end{aligned} \quad (48)$$

ただし、 $\boldsymbol{\sigma}$ は時刻 t_n の Cauchy 応力テンソルであり、 $\mathbf{S}$ は時刻 t_n の配置を基準とする時刻 t_{n+1} の第2Piola-Kirchhoff 応力テンソル応力である。 $\mathbf{E}$ は t_n から t_{n+1} までの変位を考慮した Green-Lagrange ひずみテンソルである。また、表面力ベクトル $\mathbf{t}_{n+1}$ と物体力ベクトル $\rho_{n+1}\mathbf{b}$ も時刻 t_n の配置を基準とする。

この式の実装は現配置からの応力増分の計算は必要となり、上式の $\dot{\mathbf{S}}$ は式(40)~(46)までの応力速度を入れ替えて計算する。このため、Advance/FrontSTR 内の亜弾性体と関わる計算、すなわち弾塑性、粘塑性変形が考慮した計算は Update Lagrange 法を利用している

4.2. 亜弾性・超弾性の比較

Advance/FrontSTR で利用可能な材質定義「!ELASTIC」を利用することで、変形挙動を表現することができる。

- ・線形弾性：材質定義は「!ELASTIC」のみ、ステップ解析の幾何非線形を考慮しない (NLGEOM=OFF)時。
- ・超弾性：材質定義は「!ELASTIC」のみ、ステップ解析の幾何非線形を考慮する (NLGEOM=ON)時。
- ・亜弾性：材質定義は「!ELASTIC」の他、「!PLASTIC」や「!VISCOPLASTIC」を使用し、ステップ解析の幾何非線形を考慮する (NLGEOM=ON)時。

「!ELASTIC」は一般的に線形弾性材質を定義する。この時弾性マトリクス $\mathbf{D}$ は微小変形ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ と乗すると応力が得られる。しかし、幾何非線形を考慮すると指定すると、「!ELASTIC」で定義した材質を利用し、客観性のある超弾性モデルか、亜弾性モデルかを使う選択することになる。市販ソフトのいくつかは亜弾性モデルを選択しているようだが、Advance/FrontSTR は超弾性モデルを使っている。その理由は第3節に示したように超弾性体は理論的に問題の少ないモデルである

ためである。

図2では、均一な一軸変形を受ける変形体（初期長さ=L₀）を同じヤング率 E を用いた亜弾性と超弾性モデルから得られた計算結果を示している([9], p385)。ここから分かるように変形量が小さい時（5%以下）、両モデルから得られた結果は大きな差が見られないが、その範囲を超えるとユーザーにはどちらかが実変形に近い結果を得られるかと判断することが要求される。

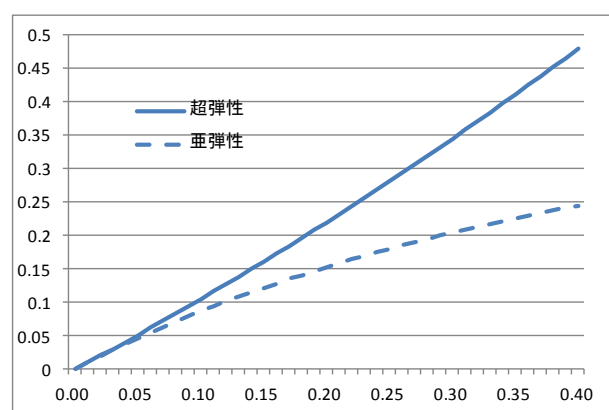


図2 応力-変位曲線

5. 結論

本稿は、よく使われている非線形弾性構成式、すなわち Cauchy 弾性、Green 弾性（超弾性）や亜弾性について議論した。この中、超弾性について熱力学法則を満足しているが、Cauchy 弾性と亜弾性理論はその保証がないので、それらに応用する時、熱力学の法則を満足していることに深く注意する必要がある。

亜弾性モデルを応用することについては、多くの応力速度がありその選択が難しい。現在、研究者の多くは Advance/FrontSTR が現在採用している Jaumann 速度の適用は主流ではなく、対数応力速度の適用が主流である。そのため、対数応力速度の実装、または Simo らの弾塑性変形の乗算分解方法の実装を今後の改良として検討している。

参考文献

- [1] C.Truesdell, W.Noll, "The Non-linear Field Theories of Mechanics",

- Springer(2004)
- [2] M.E.Gurtin, E.Fried, L.Anand, "The Mechanics and Thermodynamics of continua" , Cambridge(2010)
 - [3] S.S.Antman, "Nonlinear problems of elasticity", Springer(2005)
 - [4] G. A. Halzaptel, "Nonlinear Solid Mechanics-A continuum Approach for enigineer", John Wiley & Sons(2000)
 - [5] 袁熙, "Advance/FrontSTR Ver.3.0 の非線形解析機能について", アドバンスシミュレーション, 4(2010),pp6-59
 - [6] J.C.Simo, "On the computational significance of intermediate configuration and hyperelastic stress relations in finite deformation elastoplasticity", Mech.Mater., 4(1985), pp439-451
 - [7] H.Xiao, O.T.Bruhns, A Meyer, "On the existence and uniqueness of integrable-
xactly hypoelastic equation
○
 $\boldsymbol{\tau} = \lambda(tr\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$ of grade zero and its significance to finite inelasticity", Acta Mech. 138(1999), pp31-50
 - [8] M.Koji, K.J.Bathe, "Studies of Finite Element Procedures-Stress Solution of a Closed Elastic Strain Path with Stretching and Shearing using the Updated Lagrangian Jaumann Formulation", Computers & structure, 26(1987), pp175-179
 - [9] K.R.Rajagopal, A.R.Srinivasa, "On the response of non-dissipative solids", Proc. R.Soc. A(2007),pp.357-367
 - [10] K.J.Bathe, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice –Hall (1985)