

接触解析のための複合要素の開発

袁 熙*

Development of Composite Tetrahedral Element for Contact Analysis

Xi YUAN*

有限要素法解析では、セレンディピティ 6 面体 2 次要素および完全多項式形状関数を利用した 4 面体 2 次は面圧を受ける時、要素中間節点とコーナー節点の等価節点力は大きな差を生じる。このような要素は接触解析に応用する時、その収束性は悪く、実用に向かないことである。その中、6 面体 2 次要素については 6 面体 Lagrange 要素を利用すればその問題を回避できるが、4 面体 2 次要素についてはその方法が通用しない。本稿は接触解析に応用できる 4 面体 2 次要素を開発するため、複数の 1 次 4 面体から構築した新しい 4 面体 2 次要素を提案した。この新しい要素は均一な面圧を受ける時の接触力は均一であり、また 1 次 4 面体要素の体積ロッキング現象も低減され、幾何非線形・材料非線形も対応済みである。本稿では、この新しい要素の作り方を述べ、その性能について言及する。

Key words: finite element analysis, composite element, contact, volumetric locking, lumped mass matrix

1. はじめに

FEM 構造解析において適切な要素の利用はいうまでもなく非常に重要である。解析精度の面から 3 次元ソリッド要素を利用する時 6 面体要素の利用を勧めるが、しかしながら解析対象の形状が複雑な場合、良質な 6 面体要素モデルの生成は非常に困難であり、4 面体要素の利用は避けられないのが現状である。また、4 面体 1 次要素は体積ロッキングの回避に十分な自由度を持っていないため、非圧縮性、近似非圧縮性超弾性変形、弾塑性大変形問題には不向きであるため、4 面体 2 次要素の利用は必要になる。しかし、標準的な変位型 4 面体 2 次要素にも問題がある、その 1 つはその集中質量マトリクスを計算する時、負や零の質量を避けるため計算方法には工夫する必要がある。もう 1 つはこの要素は面圧を受ける時、要素中間節点とコーナー節点の等価節点力は大きな差を生じる。そのため固有値解析、動的陽解析や接触解析の応用には困難が生じる。

Advance/FrontSTR 要素 342 は今までは上記な一般的な 4 面体 2 次要素である。また、Advance/

FrontSTR は slave 節点と master 要素面による接触解析を行うため、要素 342 は master 要素になる時、収束性は非常に悪くなるため、接触解析に応用ができないものであった。本開発は上記の問題を解決するのは目的である。本開発は開発した新しい 4 面体 2 次要素は適切な集中質量マトリクスは得られ、固有値解析や動的陽解析の応用にも期待である。

本開発の基本的な考え方は 1 つの 4 面体 2 次要素を 12 個の 4 面体 1 次要素から構築するものである。この考え方は Thoutireddy ら [1] による考案したことであるが、本開発は接触力の適切な評価を重点に置き、文献 [1] に提出した仮想ひずみ/仮想応力方法を採用せず、違う実装方法を提案した。また、4 面体 1 次要素固有な体積ロッキング問題を回避するため、B-bar [2] または F-bar 法 [3] の考え方も取り入れた。本要素は Total Lagrange 法、Updated Lagrange 法のような非線形キネマティクスを簡単に対応できる。本稿では幾つかのパッチテスト解析を行い、その解析精度を確認した。

*アドバンスソフト株式会社 技術第 5 部

5th Technical Division, AdvanceSoft Corporation

2. 解析方法

2.1. 幾何非線形有限要素法の概要

Advance/FrontSTRはTotal Lagrange法およびUpdated Lagrange法を採用し、幾何非線形問題を解く。

2.1.1. 静的解析問題の定式化

Total Lagrange法では、時刻0の初期配置を基準とする時刻 t_{n+1} での内部仮想仕事の式を用いる。

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{S}_{n+1} : \delta \mathbf{E} d\Omega_0 = \int_{\Gamma_0} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \delta \mathbf{v} d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega_0 \quad (1)$$

ただし、 $\mathbf{S}$ と $\mathbf{E}$ は時刻0の初期配置を基準とする時刻 t_{n+1} の第2Piola-Kirchhoff応力テンソルとGreen-Lagrangeひずみテンソルを表す。また、 $\mathbf{t}_0$ は公称表面力ベクトル、 $\rho_0 \mathbf{b}$ は初期配置の単位体積当りに換算した物体力ベクトルである。Updated Lagrange法を採用する時、時刻 t_n の現配置を参照配置とする時刻 t_{n+1} での内部仮想仕事式を用いる。

$$\int_{\Omega_n} \dot{\mathbf{S}}_n : \delta \mathbf{E}_n d\Omega + \int_{\Omega_n} \boldsymbol{\sigma}_n : (\delta \mathbf{E}_n) d\Omega = \int_{\Gamma_n} \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \delta \mathbf{v} d\Gamma_n + \int_{\Omega_n} \rho_{n+1} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega_n \quad (2)$$

ただし、 $\boldsymbol{\sigma}$ は時刻 t_n のCauchy応力テンソルであり、 $\mathbf{S}$ は時刻 t_n の配置を基準とする時刻 t_{n+1} の第2Piola-Kirchhoff応力テンソル応力である。 $\mathbf{E}$ は t_n から t_{n+1} までの変位を考慮したGreen-Lagrangeひずみテンソルである。また、表面力ベクトル $\mathbf{t}_{n+1}$ と物体力ベクトル $\rho_{n+1} \mathbf{b}$ も時刻 t_n の配置を基準とする。

上記の速度形定式を増分方式に書き換え、式(1)または(2)を有限要素離散化すると、最終的に以下のような増分形式が得られる。

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{F} - \mathbf{Q} \quad (3)$$

ここでは、 $\mathbf{K}, \mathbf{U}, \mathbf{F}, \mathbf{Q}$ はそれぞれ全体剛性マトリクス、変位ベクトル、外力ベクトル、内力ベクトルである。また、ここで示した $\mathbf{K}, \mathbf{F}, \mathbf{Q}$ はすべて変形に伴い変化する可能性があるため、上記の方程式は非線形であり、Advance/FrontSTRはNewton-Raphson法を用いこの方程式を解く。

2.1.2. 動的解析問題の定式化

動的解析では、慣性力および運動減衰を考慮する

必要があるため、式(3)と対応する有限要素方程式は以下になる。

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) + \mathbf{Q}(t + \Delta t) = \mathbf{F} \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{M}$ と $\mathbf{C}$ は質量マトリクスと減衰マトリクスである。Advance/FrontSTRは直接時間積分法を用い、動的陽解法および動的陰解法を採用し、方程式(4)を解く。動的陽解法を採用する時、各増分ステップの変位増分は十分小さいとの条件に、式(4)は線形方程式と見なし、それを増分ステップごとに解いて解を求めている。また、動的陰解法を採用する時、Newton-Raphson法を用い式(4)を解く。

2.2. 要素の定式化方法

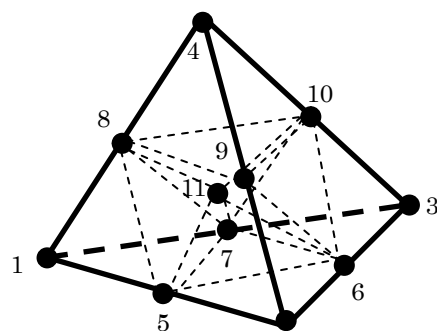


図1 要素形状および節点番号[1]

本開発要素は4面体の中心に一節点を追加し、12個の1次4面体子要素より構築する。その要素計算および節点番号は図1に示す。追加した節点(図1節点11番)の初期座標は以下のように計算する。

$$\mathbf{X}_{11} = \frac{1}{6} \sum_{i=5}^{10} \mathbf{X}_i \quad (5)$$

しかし、節点の追加は自由度の追加を伴うため、これを避けたく、本開発では下記の仮定を採用し、追加した自由度を消去する。

$$\mathbf{u}_{11} = \frac{1}{6} \sum_{i=5}^{10} \mathbf{u}_i \quad (6)$$

ここでは $\mathbf{u}_i$ は節点 i の変位ベクトルと表す。

この要素は1次4面体子要素から構築したため、要素内および要素面内の変位は区分な線形内挿関数から表す。そのため、適切な集中質量マトリクス(文献[1]を参照)および面圧分布を得られることができる。図2では、面圧1を受ける時の等価節点力

を示している。また、比較しやすいため、図 2 には一般的な 4 面体 2 次要素を採用する時の等価節点力も示している。

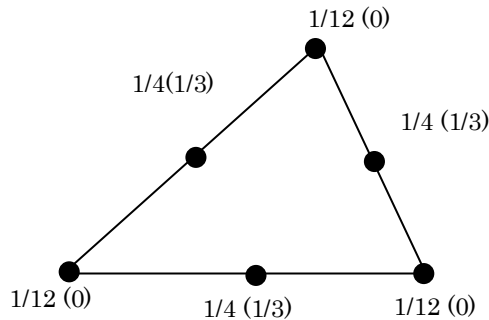


図 2 均一な圧力を受けた時の等価節点力分布 () 内は標準的な変位型 4 面体 2 次要素を利用する時の数値を示している)

しかし、4 面体 1 次要素は十分な自由度を持っていないため、非圧縮性または近似非圧縮性材料を取り扱う時、極端に剛な応答が得られ、誤差が過大になる体積ロッキング現象が起きる。本開発では、6 面体 1 次要素の体積ロッキング現象を回避するため良く使われている B-bar 法[2]を参考に、まず任意点の Green-Lagrange ひずみを体積成分 $\mathbf{E}^{\text{vol}}$ および偏差部分 $\mathbf{E}^{\text{dev}}$ 下式のように分解し、その体積成分の平均値を下式のように計算する。

$$\bar{\mathbf{E}}^{\text{vol}} = \frac{\sum_{i=1}^{12} \mathbf{E}_i^{\text{vol}} V_i}{\sum_{i=1}^{12} V_i} \quad (7)$$

ここでは、 V_i は各子要素の体積である。そこで、B-bar 法と同じく、要素内の仮想 Green-Lagrange ひずみは以下のように定義する、

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}}^{\text{vol}} + \mathbf{E}^{\text{dev}} \quad (8)$$

この式を式(1)または式(2)を代入すると、有限要素法定式化を完成される。

3. 検証

3.1. パッチテスト

文献[5]から考案したソリッド要素パッチテストを用い、要素の基本性能およびプログラム実装の正しさを検証する。この解析モデル (図 3) は $1 \times 1 \times 1$ の立方体にゆがんだ 6 面体を置き、その外側の節点に強制変位加え、立方体内の均一的なひずみ分布を

再現できるかと検証する。

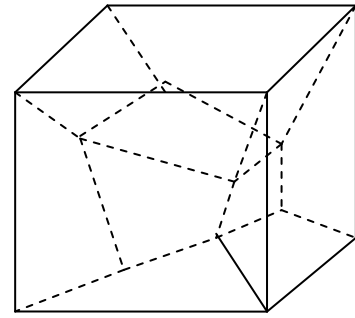


図 3 パッチテストメッシュ図

本検証計算では、境界点を以下の強制変位を加える：

$$\begin{aligned} u_x &= 10^{-3}(2x + y + z)/2 \\ u_y &= 10^{-3}(x + 2y + z)/2 \\ u_z &= 10^{-3}(x + y + 2z)/2 \end{aligned} \quad (9)$$

また、材質は線形弾性材とし、そのヤング率およびポアソン比は 1.0×10^6 と 0.25 である。線形解析条件では、要素内に以下のような均一的なひずみおよび応力分布になっている。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 10^{-3} \\ \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = 2000 \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 400 \end{aligned} \quad (10)$$

本検証では図 3 のモデルを 35 個の新規開発した 4 面体 2 次要素を用いメッシュを作成し解析を行い、その通りの結果が得られたことが確認できた。

3.2. 片持ちばり問題

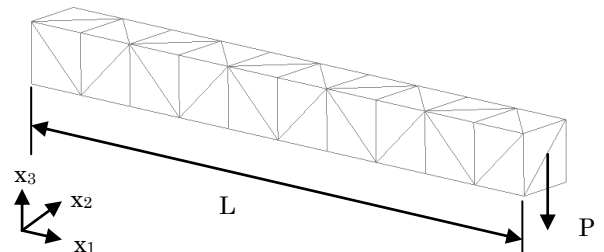


図 4 片持ちばりのメッシュ分割例

本検証においては、片持ちばりを図 4 のようにメッシュ分割したものを対象にした。ばりの一端は完全固定し、もう一端は P の面荷重を加えた。この問題の理論解は以下である[6]。

$$u_1 = \frac{-Px_3}{6D} \left\{ (6L - 3x_1)x_1 + 2\bar{v} \left[x_3^2 - (t/2)^2 \right] \right\}$$

$$u_2 = 0 \quad (11)$$

$$u_3 = \frac{P}{6D} \left[\frac{3\bar{v}x_3^2(L - x_1) + (4 + 5\bar{v})(t/2)^2x_1}{+(3L - x_1)x_1^2} \right]$$

ここでは

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu)}; \quad \bar{v} = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (12)$$

新要素（要素番号 3422）の収束性を検証するため、3 種類のメッシュを使い、その計算結果は旧 4 面体 2 次要素（要素番号 342）の計算結果と比較し、図 5 にまとめた。この図の横軸は要素寸法 h と梁の長さ L の比の対数であり、縦軸は最大変位値の計算値 u_h と理論解 u の差である。この図から新しい要素 3422 は旧要素 342 と比べ精度は悪くなるが、メッシュ寸法と伴った収束性はよくなるが見える。

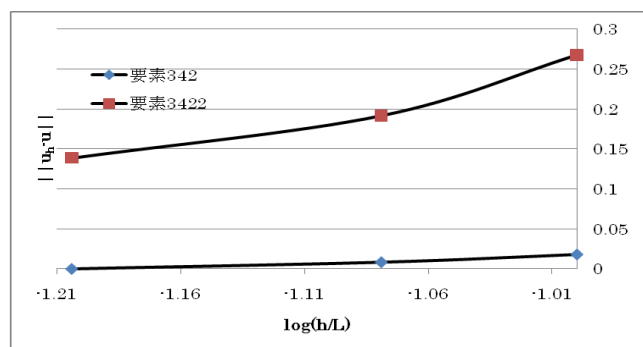


図 5 バッチテストメッシュ図

3.3. 梁の固有値解析

要素の低周波数モードは有限要素動的解析の精度に大きな影響を与える。本検証は集中質量マトリクスを採用した時の本開発要素の精度を検証するものである。

本検証計算は 3.2 節に示した同じモデルを採用し、Advance/FrontSTR の固有値解析機能を利用し解析を行った。その計算結果は表 1 に示している。この結果から、メッシュ寸法の減少に伴い、計算した固有値は安定に理論解へ収束していくことが分かる。

表 1 片持ち梁の固有値

	1 次モード	2 次モード	3 次モード
理論値	3.609e3	3.609e3	2.262e3
h/L			
0.1	4.051e3	4.225e3	2.164e3
誤差	12%	17%	4%
0.083	3.916e3	3.994e3	2.339e3
誤差	8.5%	11%	1.5%
0.065	3.816e3	3.879e3	2.282e3
誤差	5.7%	7.5%	0.9%

4. 結論

本研究は、接触解析に適応した 4 面体 2 次要素を開発した。この要素は 1 つの 4 面体 2 次要素を 12 個の 4 面体 1 次要素から構築し、中央節点を含む各節点を均一な面圧分布および集中質量を有し、動的解析、接触解析に適応している。さらに、B-bar 法を採用し、4 面体 1 次要素の体積ロッキング現象を低減した。この要素は Advance/FrontSTR Ver.4.0 に実装し、その解析精度を検証した。

参考文献

- [1] P.Thoutireddy, J.F.Molinari, E.A.Repetto, M.Ortiz;"Tetrahedral composite finite element",Int.J.Num. Meth. Eng., 53(2002), pp.1337-1351
- [2] T.J.R.Hughes;"Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media", Int. J.Num. Meth. Eng.(1980),pp.1413
- [3] E.de Souza Neto, F.A.Pires, D. Owen:"F-bar-based linear triangle and tetrahedral for finite strain analysis of nearly incompressible solids. Part I: formulation and benchmarking", Int.J. Num. Meth. Eng.62(2005),pp.353-383
- [4] 袁熙;"Advance/FrontSTR Ver3.0 の非線形解析機能について", アドバンスシミュレーション, 4(2010), pp.6-59

- [5] R.H.MacNeal, R.L.Harder: "A proposed standard set of problems test finite element accuracy", Finite Element Ana. Des., 1(1985), pp1-20
- [6] S.P.Timoshenko, J.N.Goodier: "Theory of Elasticity(3rd edn). McGraw-Hill(1970)