

## Advance/FrontSTR Ver.4.0 解析機能の拡張

袁 熙\*

## New Functions of Advance/FrontSTR Ver.4.0

Xi Yuan\*

Advance/FrontSTR Ver.4.0 の新しく追加した解析機能を紹介する。

**Key word:** 粘弾性、粘塑性、熱-弾塑性連成解析、非線形動的解析、モーダル応答解析、シェル要素、梁要素、マス要素

## 1. はじめに

Advance/FrontSTR は、先進性と実用性を兼ね備えた汎用構造解析ソフトウェアとして進化を続けている。Advance/FrontSTR Ver.3.0 はリリースした以来、ユーザーからの要望に応じアドバンスソフト株式会社はこのソフトウェアの解析機能の拡張を行った。さらに、文部科学省の次世代 IT 基盤構築のための研究開発「イノベーション基盤シミュレーションソフトウェアの研究開発」プロジェクトで、アドバンスソフト株式会社は「構造解析ソフトウェア FrontISTR における材料・幾何学的非線形機能の拡張および精度検証」等の業務を担当し、幾つかの新しい解析機能を開発した。これらの機能を商用パッケージソフトウェア Advance/FrontSTR Ver.3.0 にも取り入れ、Advance/FrontSTR Ver.4.0 をリリースことにした。本稿ではこれらの新機能に関わる基礎理論を紹介する。

以下では上記示した新規機能を材料非線形・非線形動的解析・モーダル応答解析・構造要素を 4 つのグループに分けて解説し、最後に幾つかの検証例題を紹介する。

## 2. 材料非線形

Advance/FrontSTR Ver.3.0 は弾性・超弾性・弾塑性材質を取り扱い機能が有した、Advance/FrontSTR Ver.4.0 は変形履歴の時間依存性のある

粘弾性・粘塑性材料の計算機能を追加した。

## 2.1. 粘性材料

運動している連続体の内部に速度勾配がある場合に、速度を一樣にするような向きの接線応力が現れる性質・粘性は液体状態または固体状態で物質の内部摩擦(internal friction)で、主として材料組成や温度の関数である。

粘性は連続体の変形速率依存性を表す性質である。粘性率 $\eta$ は以下のように応力 $\sigma$ と粘性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_v$ の関係を表す。

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon}_v \quad (1)$$

粘性モデルの記号は図 1 に示している。

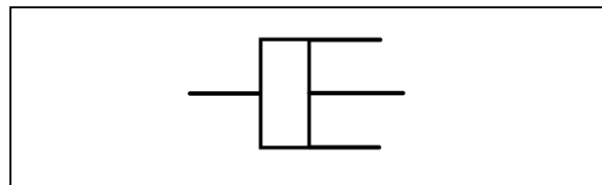


図 1 粘性モデル記号

## 2.2. 粘弾性

粘弾性(viscoelasticity)とは粘性及び弾性両方を合わせ性質のことである。この粘弾性を持った物体を粘弾性体といい、プラスチックなどの高分子物質がこの粘弾性体に該当する。もっとも簡単な粘弾性モデル図 2 に示したようにバネとダッシュポットを 1 つずつ並ぶものであり、それぞれ Kelvin-Voigt および Maxwell モデルと呼ぶ。

\*アドバンスソフト株式会社 技術第 5 部

5<sup>th</sup> Technical Division, AdvanceSoft Corporation

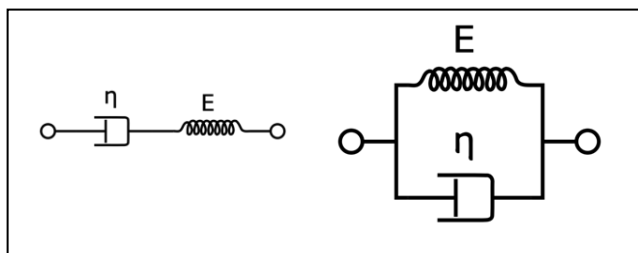


図 2 Maxwell および Kelvin-Voigt 粘弾性モデル

Maxwell 材は瞬間的なひずみを与えると、図 3 に示したように、応力は時間とともに減衰し、最後ゼロになる。これは「応力緩和」現象である。一方、Maxwell 材は瞬間的なひずみを受けると、瞬間的弾性変形を行い、その後ダッシュポットの変形は主導になり、時間とともに応力がゼロに近づく。つまり、粘弾性体ではなく、単なる粘性体の振舞いになってしまう。

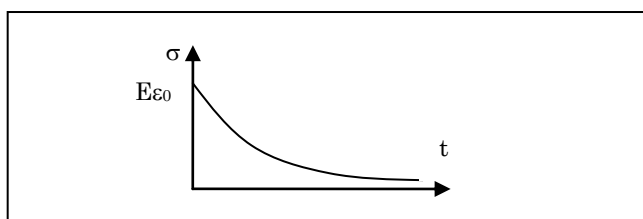


図 3 応力緩和現象

Kelvin-Voigt 材は瞬間的な応力を与え、しばらく維持すると、ひずみは徐徐バネ剛性に決める変形量まで接近し、その後変化しなくなる。このような応力一定の状況下において時間依存性のある変位は「クリープ」と呼ばれる現象である。図 4 に示した例では、変形が安定した後に応力を外す時に変形挙動を示している。図に示したように、時間が十分立つと、変形量は完全になくなる。すなわち、Kelvin-Voigt モデルに示すクリープ現象は可逆クリープである。

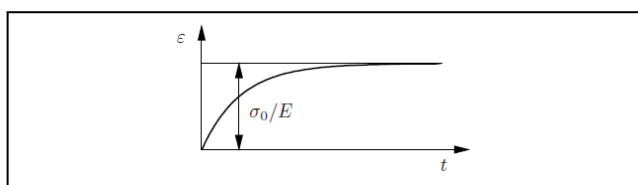


図 4 クリープ現象

一方、Kelvin-Voigt 材に瞬間ひずみをかけること

ができない。その時、ひずみ速度は無限になり、実現不能になる。

以上に示したように、Maxwell モデルおよび Kelvin-Voigt モデルはそれぞれ応力緩和現象およびクリープ現象を表現することができるが、両現象を表現することができない。本ソフトウェアは図 5 に示した一般化された Maxwell モデル、または Maxwell-Wiechert モデルを採用している。このモデルは応力緩和現象およびクリープ現象を表現でき、複雑な材料の粘弾性挙動をより現実表現することができる。

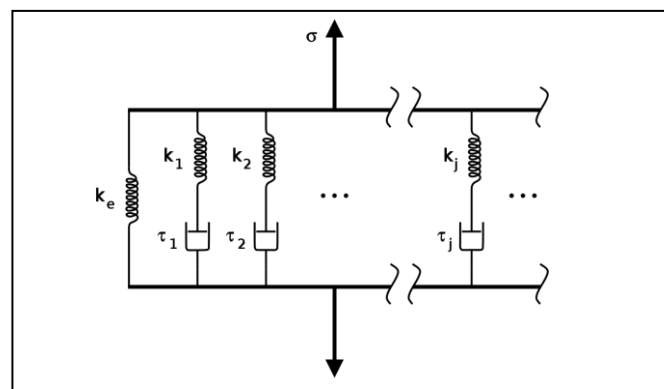


図 5 一般化された Maxwell モデル

### 2.2.1. 一般化された Maxwell モデル

粘弾性性質を持つポリマー材の多くは、その体積変形剛性は偏差成分より高く、弾性変形しか起こらないである。そのため、粘弾性材の構成式は偏差成分と体積成分を分けて書くのは自然である。ここで、粘弾性材の初期弾性変形エネルギーを偏差成分  $\bar{W}$  および体積成分  $U$  を分けて書く。

$$W^0 = \bar{W}^0(e) + U^0(\Theta) \quad (2)$$

ここで  $e = \text{dev}[\epsilon]$  と  $\Theta = \text{tr}[\epsilon]$  は偏差ひずみおよび体積ひずみである。上式を使って、超弾性の性質から弾性応力は以下のように書く。

$$\sigma^0 = \text{dev} \left[ \frac{\partial \bar{W}^0}{\partial e} \right] + U^0 \mathbf{I} \quad (3)$$

また、粘性変形を考慮した粘弾性応力は

$$\sigma(t) = \sigma^0(t) - \sum_{i=1}^N \mathbf{h}_i(t) \quad (4)$$

である。ここでは、 $\mathbf{q}_i$  は粘性変形と表す内部変数で

あり、その時間発展方程式は

$$\dot{\mathbf{h}}_i + \frac{1}{\tau_i} \mathbf{h}_i = \frac{\gamma_i}{\tau_i} \text{dev} \left[ \frac{\partial \bar{W}^0}{\partial \mathbf{e}} \right] \quad (5)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{h}_i = 0$$

となっている。ここで、 $\tau_i$ は緩和時間であり、 $\gamma_i$ は緩和係数である。式(5)は線形であり、その解は以下の畳み込み積分である。

$$\mathbf{h}_i(t) = \frac{\gamma_i}{\tau_i} \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{(t-s)}{\tau_i}\right] \text{dev} \left\{ \frac{\partial \bar{W}^0}{\partial \mathbf{e}(s)} \right\} ds \quad (6)$$

式(6)を式(4)に代入し、積分すると以下の粘弾性構成式が得られる。

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = U^0 \mathbf{I} + \int_{-\infty}^t g(t-s) \frac{d}{dt} \left( \text{dev} \left[ \frac{\partial \bar{W}^0}{\partial \mathbf{e}(s)} \right] \right) ds \quad (7)$$

ここでは

$$g(t) = \gamma_\infty + \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp\left[-\frac{t}{\tau_i}\right] \quad (8)$$

は正規化緩和関数であり、式の右側は Prony 級数と呼ばれる。

現時点では Advance/FrontSTR は等方性を持つ線形粘弾性材しか考慮しない。この場合では、式(4)以下の式まで変形である。

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = K \text{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I} + 2\mu \left( \nu_0 \mathbf{e} + \sum_{i=1}^N \nu_i \mathbf{q}_i \right) \quad (9)$$

ここでは  $K, \mu$  と  $\nu$  はそれぞれ体積弾性率、Lame 定数およびポアソン比である。また、 $\mathbf{q}_i = \gamma_i \mathbf{h}_i = 2\mu \nu_i \mathbf{h}_i$  に書き換えた。また、式(9)に示した体積変形成分は粘性変形と関わりがないので、その偏差成分を集中し議論する。次では式(10)をベースにし、粘弾性解析の有限要素法定式化を行う。

$$\mathbf{s}(t) = 2\mu \left( \mu_0 \mathbf{e} + \sum_{i=1}^N \mu_i \mathbf{q}_i \right) \quad (10)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_i + \frac{1}{\tau_i} \mathbf{q}_i = \frac{1}{\tau_i} \text{dev} \left[ \frac{\partial \bar{W}^0}{\partial \mathbf{e}} \right]$$

## 2.2.2. 応力更新アルゴリズムおよび Consistent 接線係数

式(7,8)と同様、式(10)から偏差応力に関する時間発展式が得られる。

$$\mathbf{s}(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \dot{\mathbf{e}}(s) ds \quad (11)$$

$$G(t) = 2\mu \left[ \nu_0 + \sum_{i=1}^N \nu_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \right]$$

ひずみの初期値を時間=0 で与えることを仮定し、時間増分ごとに式(11)の積分を行う。

$$\int_0^t (\bullet) ds = \int_0^{t_n} (\bullet) ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\bullet) ds \quad (12)$$

その結果、以下の再帰的な計算式が得られる。

$$\mathbf{s}_{n+1} = 2\mu \left[ \nu_0 + \sum_{i=1}^N \nu_i \left( \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \mathbf{h}_n + \Delta \mathbf{h}_{n+1} \right) \right] \quad (13)$$

ここでは

$$\mathbf{h}_n = \exp\left(-\frac{t_n}{\tau_i}\right) \int_0^{t_n} \exp\left(\frac{s}{\tau_i}\right) \dot{\mathbf{e}}(s) ds \quad (14)$$

$$\Delta \mathbf{h}_n = \exp\left(-\frac{t_n + \Delta t}{\tau_i}\right) \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} \exp\left(\frac{s}{\tau_i}\right) \dot{\mathbf{e}}(s) ds \quad (15)$$

また、 $t_n$  から  $t_{n+1}$  間のひずみ速度以下のように計算する。

$$\dot{\mathbf{e}}(s) \approx \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n) \quad (16)$$

この時式(15)の解析解が得られる。

$$\Delta \mathbf{h}_n = \frac{\tau_i}{\Delta t} (1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i}\right)) (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n) \quad (17)$$

ステップ  $n$  の  $\mathbf{h}_n$  は既知とし、式(17),(13),(9)からステップ  $n+1$  の応力状態を計算できる。さらに、下記の Consistent 接線係数を計算することができる。

$$\mathbf{C}_{ve} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} = K \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \left[ \nu_0 + \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{\tau_i}{\Delta t} \left( 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i}\right) \right) \right] \left[ \mathbf{C}_e - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] \quad (18)$$

### 2.3. 粘塑性

粘塑性モデルは変形速率依存性を持つ弾塑性変形挙動を記述するモデルである。図 6 には示したモデルでは、弾塑性モデルにダッシュポットを追加し、その変形速率依存性を表している。

粘塑性モデルは降伏面が存在する、存在しないとも可能である。粘塑性モデルは降伏面が存在しない変形速率依存性を持つ非弾性変形挙動を指すモデルをクリープモデルと呼ばれることもあるが、本ソフトウェアは上記の広義的な定義を使う。

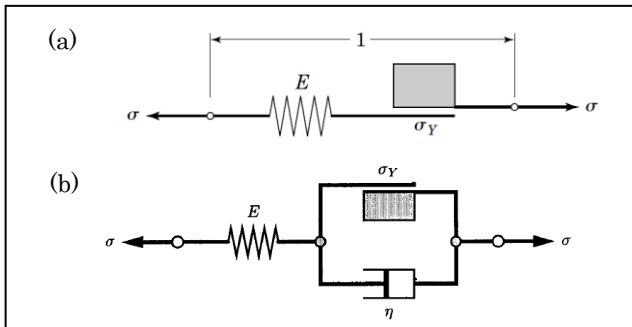


図 6 一次元塑性(a)、粘塑性モデル(b)

#### 2.3.1. 粘塑性材料の変形特徴

粘塑性材料は以下の変形特徴を表せる。

- ・ ひずみ硬化

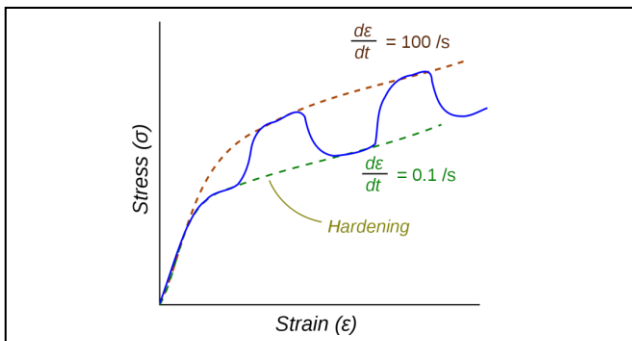


図 7 ひずみ速率が変化する時の応力—ひずみ曲線

- ・ クリープ

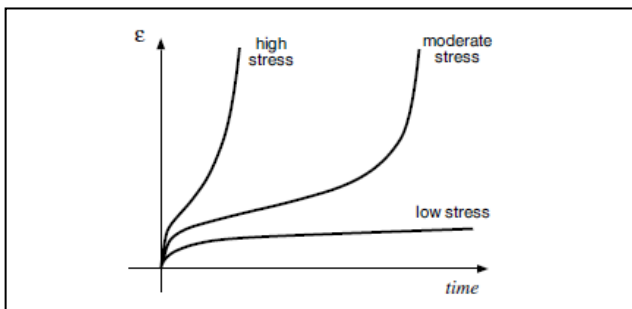


図 8 クリープ：一様な応力条件下のひずみ増加

- ・ 応力緩和

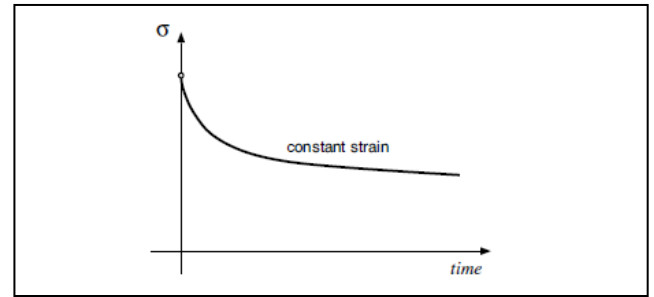


図 9 応力緩和:一様なひずみ条件下の応力減少

#### 2.3.2. 一般化粘塑性モデル

粘塑性材の構成式は以下の方程式で表す。

- ・ ひずみ分解式

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} \quad (19)$$

- ・ 変形エネルギー関数

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \mathbf{q}) \quad (20)$$

ここでは  $\mathbf{q}$  は硬化を表す内部変数である。

- ・ 応力  $\boldsymbol{\sigma}$  関係式および硬化駆動力  $\mathbf{A}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}; \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{q}} \quad (21)$$

- ・ 流れ則

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}); \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \quad (22)$$

##### 1) 接線係数の計算

粘塑性を考慮したときの構成式は、

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{c}^e : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}) \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c = \boldsymbol{\varepsilon}_n^c + \Delta t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+\theta}^{vp} \quad (24)$$

ここで、 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+\theta}^{vp}$  は、

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+\theta}^{vp} = (1 - \theta) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{vp} + \theta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{vp} \quad (25)$$

とする。式(23),(24),(25)から

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \mathbf{c}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^c - \Delta t \mathbf{G}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \\ \mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n - \Delta t \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (26)$$

が得られる。次では、Newton-Raphson 法を用い、この非線形方程式からクリープひずみ増分  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^c$  を求める。

初期値を  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n$  およびひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$  を求められたとして、反復解と増分解は次式とする。

$$\mathbf{R}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{0} = \mathbf{R}_{n+1}^{(k)} - (\mathbf{c}^{-1} + \Delta t \mathbf{c}_{n+1}^{vp}) d \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} \quad (25)$$

ここで、

$$\mathbf{c}_{n+1}^{vp} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+\theta} = \theta \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1} \quad (26)$$

とする。上式(25)と式(26)の解を使って残差  $\mathbf{R}$  が  $\mathbf{0}$  になるまで反復解法を行うとき、応力  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  と接線係数

$$\mathbf{c}_{n+1}^* = [\mathbf{c}^{-1} + \Delta t \mathbf{c}_{n+1}^{vp}]^{-1} \quad (27)$$

を用いる。

## 2) 応力更新アルゴリズム

式(25)の係数  $\theta=0$  の時、式(26)および式(27)から

$$\mathbf{c}_{n+1}^{vp} = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad \mathbf{c}_{n+1}^* = \mathbf{c} \quad (28)$$

が得られる。この時

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{c}^e : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp} - \Delta t \mathbf{G}_n) \quad (29)$$

となる。この時の接線係数は標準的な弾性接線係数となり、計算コストが低い、時間増分は以下の条件が満足しないと計算が不安定になる。

$$\Delta t \leq \Delta t_{cri} \quad (30)$$

経験的には、以下の条件が満足すればよい。

$$t[\beta_n^T \beta_n] \leq \frac{1}{2} [(\boldsymbol{\varepsilon}^e)^T \boldsymbol{\varepsilon}^e]^{\frac{1}{2}} \quad (31)$$

式(25)の係数  $\theta=1$  の時、陰的解法になる。この時の接線係数は式(27)となり、この接線係数を計算するのに時間がかかる他、非対称になる可能性もある。この方法を採用すると計算時間がかかることになるが、計算精度はよくなるため、本ソフトウェアは粘塑性材料に対し陰的積分方法を採用している。

### 2.3.3. 降伏面が有する粘塑性モデル

上記の式(19)~(22)では特に降伏面の存在を仮定していないが、降伏面が存在する場合では

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = \dot{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (32)$$

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = \dot{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$$

ここでは  $\Psi$  は降伏関数を表す。この式は弾塑性変形関係と同じである。ただし、ここで表す時間微分は実時間微分である。粘塑性変形問題の解法も弾塑性問題の解法と同じである。粘塑性接線係数は塑性率パラメータを粘性係数  $\dot{\gamma}$  に入れ替えたら得られる。

## 1) 応力更新アルゴリズム

本ソフトは後退型 Euler 積分法(return mapping 法)を利用し、粘塑性変形を計算する。ステップ  $n$  の変形状態は既知として、まずは試行応力を計

算する。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}; \quad \boldsymbol{\alpha}^{trial} = \boldsymbol{\alpha}_n \quad (33)$$

ここから式(21)から応力および硬化係数を計算し、降伏条件

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}, \mathbf{A}_{n+1}^{trial}) > 0 \quad (34)$$

を満足しなければ、更新計算が完了し、そうではない場合には後退型 Euler 積分法を用い、粘塑性ひずみおよび応力を計算する。

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e, trial} - \Delta \gamma \mathbf{r}_{n+1} \\ \boldsymbol{\alpha}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{trial} - \Delta \gamma \mathbf{h}_{n+1} \end{cases} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (35)$$

ここでは

$$\Delta \gamma = \Delta t \dot{\gamma}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}, \mathbf{A}_{n+1}^{trial}) \quad (36)$$

である。

## 2) 等方性降伏関数を利用した場合の定式化

Mises 降伏関数を採用した場合、上記の計算式はさらに展開することができる。この時

$$\mathbf{r}_{n+1} = \frac{\partial \Phi_{mises}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}^{trial}}{\|\mathbf{s}^{trial}\|} \quad (37)$$

となり、この式を式(35)に代入し、弾性マトリクスをかけると下式が得られる。

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}^{trial} - \Delta \gamma 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}^{trial}}{\|\mathbf{s}^{trial}\|} = \left(1 - \frac{\Delta \gamma 3G}{q^{trial}}\right) \mathbf{s}^{trial} \quad (38)$$

さらに、Mises 等価応力の定義から、上式は下式へ変化できる。

$$q_{n+1} = q^{trial} - 3G \Delta \gamma \quad (39)$$

弾塑性材料と違って、更新後の Mises 応力は降伏条件  $\Phi_{n+1} = 0$  を満足する必要がなく、2.3.4 節に示した粘塑性流れ則を満足することになる。

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}^{trial} - 3G \Delta \gamma = \mathbf{q}_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}) \quad (40)$$

Newton-Raphson 法を用い、上式から粘塑性ひずみ増分  $\Delta \gamma$  を求めることができる。その手順は以下である。

表 1 粘塑性ひずみ増分計算アルゴリズム

1. 初期設定  $k:=0$   
 $\Delta\gamma^0 := 0$   
 $\tilde{\Phi} := q^{\text{trial}} - q_n$
2. Newton-Raphson 法計算  
 $H = \frac{\partial q}{\partial \Delta\gamma} \Big|_{\Delta\gamma_n + \Delta\gamma} ; d = \frac{d\tilde{\Phi}}{d\Delta\gamma} = -3G - H$   
 $\Delta\gamma = \frac{q^{\text{trial}} - q_n}{3G + 1/H} = \frac{\Delta q}{3G + H} = \Delta\gamma - \frac{\tilde{\Phi}}{d}$
3. 収束条件をチェック  
 $\tilde{\Phi} := q^{\text{trial}} - 3G\Delta\gamma - q(\epsilon_{n+1}^{\text{vp}}, \alpha_{n+1})$   
IF  $|\Phi| \leq \epsilon_{\text{tol}}$  収束したと判定
4. GOTO 1

次では、粘塑性材の接線係数を導く。式(38)から、更新後の応力を計算する。

$$\sigma_{n+1} = s_{n+1} + p_{n+1} \mathbf{I} =$$

$$\sigma^{\text{trial}} - \frac{\Delta\gamma 3G}{q^{\text{trial}}} s^{\text{trial}} = \left[ c_e - \frac{\Delta\gamma 6G^2}{q^{\text{trial}}} \mathbf{I}_d \right] \quad (41)$$

$$\mathbf{I}_d = \mathbf{I}_s - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}; \quad \mathbf{I}_s = \frac{1}{2} (\mathbf{I} + \mathbf{I}^T)$$

この式から

$$c = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \epsilon_{n+1}} = c_e - \frac{\Delta\gamma 6G^2}{q^{\text{trial}}} \mathbf{I}_d -$$

$$\frac{6G^2}{q^{\text{trial}}} \epsilon^{\text{trial}} \otimes \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \epsilon^{\text{trial}}} + \frac{\Delta\gamma 6G^2}{(q^{\text{trial}})^2} \epsilon^{\text{trial}} \otimes \frac{\partial q^{\text{trial}}}{\partial \epsilon^{\text{trial}}} \quad (42)$$

のように接線係数を計算できる。また、

$$\frac{\partial q^{\text{trial}}}{\partial \epsilon^{\text{trial}}} = 2G \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{r}_{n+1};$$

$$\mathbf{r}_{n+1} = \frac{s^{\text{trial}}}{\|s^{\text{trial}}\|} = \frac{\epsilon^{\text{trial}}}{\|\epsilon^{\text{trial}}\|} \quad (43)$$

$$\frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \epsilon^{\text{trial}}} = \frac{1}{3G + H} \frac{\partial q^{\text{trial}}}{\partial \epsilon^{\text{trial}}}$$

が得られ、ここで得られた式(42)に代入し、粘塑性材の接線剛性係数が得られる。

$$C_{\text{vp}} = c_e - 6G^2 \frac{\Delta\gamma}{q^{\text{trial}}} \mathbf{I}_d + \quad (44)$$

$$6G^2 \left[ \frac{\Delta\gamma}{q^{\text{trial}}} - \frac{1}{3G + H} \right] \mathbf{r}_{n+1} \otimes \mathbf{r}_{n+1}$$

以下では本ソフトウェア導入した粘塑性モデルを列挙する。

### 2.3.4. 本ソフト導入した粘塑性モデル

#### 1) Norton 則（時間硬化則）

$$\bar{\epsilon}^c = A q^n t^m \quad (45)$$

ここでは、 $\bar{\epsilon}^c$ は相当粘性ひずみ、 $q^n$ は mises 応力、 $t$ は時間であり、 $A$ と $m, n$ は材料係数である。この式は降伏面が存在しないとしている。 $\theta=0$ の時

$$\frac{1}{H} = n A q^{n-1} t^m \quad (46)$$

が得られ、この式を式(44)に代入すると、その接線係数が得られる。

### 3. 非線形動的解析

Advance/FrontSTR Ver.3.0 の動的解析機能は直接時間積分法を採用し、しかも線弾性問題しか対応できなかった。今回のバージョンアップでは動的解析機能を大きく拡張した。まず線形問題に対しモーダル応答解析機能を追加、直接時間積分法による解法は幾何非線形および材料非線形問題についても計算できるようになった。

本節では直接時間積分法を採用した非線形動的解析機能を紹介する。

#### 3.1. 基本方程式

動的問題の運動方程式は以下である。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t+\Delta t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t+\Delta t) + \mathbf{Q}(t+\Delta t) = \mathbf{F} \quad (47)$$

ここでは、 $\mathbf{F}$ と $\mathbf{Q}$ は外力と内力であり、 $\mathbf{M}$ と $\mathbf{C}$ は質量マトリクスと減衰マトリクスである。また、Advance/FrontSTR は下記の Rayleigh 減衰を採用している。

$$\mathbf{C} = R_m \mathbf{M} + R_k \mathbf{K} \quad (48)$$

ここでは $R_m$ と $R_k$ は Rayleigh 係数である。

非線形方程式(47)をそのままの形で直接時間方向に解き進む手法は直接時間積分法を呼ぶ。本節はこの手法を中心に動的問題の取り扱い方を述べる。

### 3.1.1. Newmark-β法

時刻  $t$  までの変位、速度、加速度が既知であるとして、時刻  $t+\Delta t$  での平衡を満足する解を式(47)を解くことにより求めるものとする。このような解法を陰解法と呼ぶ。Newmark-β法は代表的な陰解法である。

静的問題の場合と同様、内力ベクトルについて線形化を行った次式に基づく Newton-Raphson 法の反復計算( $k=1,2,3,\dots$ )を行う。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^k(t+\Delta t) + \mathbf{C}^{k-1}\dot{\mathbf{U}}^k(t+\Delta t) + \mathbf{K}^{k-1}\Delta\mathbf{U}^k = \mathbf{F} - \mathbf{Q}^k(t+\Delta t) \quad (49)$$

ここでは、

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^k(t+\Delta t) &= \mathbf{U}^k(t+\Delta t) + \Delta\mathbf{U}^k \\ \dot{\mathbf{U}}^k(t+\Delta t) &= \dot{\mathbf{U}}^k(t+\Delta t) + \Delta\dot{\mathbf{U}}^k \\ \ddot{\mathbf{U}}^k(t+\Delta t) &= \ddot{\mathbf{U}}^k(t+\Delta t) + \Delta\ddot{\mathbf{U}}^k \end{aligned} \quad (50)$$

ただし右肩符号( $k$ )は第  $k$  回目の反復であることを示した。

上式には未知量が  $\mathbf{U}(t+\Delta t), \dot{\mathbf{U}}(t+\Delta t), \ddot{\mathbf{U}}(t+\Delta t)$  が含まれているため通常は三者を何らかの近似により関係付けることにより、一変数に減らして解析を行う。Newmark-β法は2つのパラメータ  $\beta$  と  $\gamma$  を用い、速度と変位を表す。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}(t+\Delta t) &= \dot{\mathbf{U}}(t) + \Delta t \left\{ \gamma \ddot{\mathbf{U}}(t+\Delta t) + (1-\gamma) \ddot{\mathbf{U}}(t) \right\} \\ \mathbf{U}(t+\Delta t) &= \mathbf{U}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{U}}(t) \\ &\quad + \Delta t^2 \left\{ \beta \ddot{\mathbf{U}}(t+\Delta t) + (1/2 - \beta) \ddot{\mathbf{U}}(t) \right\} \end{aligned} \quad (51)$$

上式で  $\gamma=1/2, \beta=0$  と置くと下記中央積分法となり、 $\gamma=1/2, \beta=1/6$  と置くと線形加速度法となる。また、 $\gamma=1/2, \beta=1/4$  である時、加速度は時刻  $t$  から  $t+\Delta t$  の間に平均的な一定値となり、材料非線形を考慮した計算でも変形エネルギーを収束条件として採用した時、この手法は無条件安定である<sup>[5][6]</sup>ため、本ソフトウェアはデフォルト値として採用している。

変位は未知量とする場合では、変位増分から速度と加速度を計算する必要があるが、これが上式から得られる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}(t+\Delta t) &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \Delta\mathbf{U}(t+\Delta t) - \frac{\gamma-\beta}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}(t) \\ &\quad - \Delta t \frac{\gamma-2\beta}{2\beta} \ddot{\mathbf{U}}(t) \end{aligned} \quad (52.1)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{U}}(t+\Delta t) &= \frac{1}{\beta\Delta t^2} \Delta\mathbf{U}(t+\Delta t) - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{U}}(t) \\ &\quad - \frac{1-2\beta}{2\beta} \ddot{\mathbf{U}}(t) \end{aligned} \quad (52.2)$$

Newmark-β法を用いて式(48)を実行するにあたっては、第  $k$  回目と第  $k-1$  回目の反復における式(52.1)および式(52.2)の差をとったら

$$\Delta\dot{\mathbf{U}}^k = \gamma\Delta t\Delta\ddot{\mathbf{U}}^k; \quad \Delta\mathbf{U} = \beta\Delta t^2\Delta\ddot{\mathbf{U}}^k \quad (53)$$

が得られる。これらの式を

$$\Delta\dot{\mathbf{U}}^k = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \Delta\mathbf{U}^k; \quad \Delta\mathbf{U} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \Delta\mathbf{U}^k \quad (54)$$

と書き直し、式(49)と式(50)に代入すると、

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{C}^{k-1} + \mathbf{K}^{k-1} \right) \Delta\mathbf{U}^k \\ = \mathbf{F} - \mathbf{Q}^{k-1} - \mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{U}}^{k-1} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^{k-1} \end{aligned} \quad (55)$$

を得る。Advance/FrontSTR は Newton-Raphson 法を採用し、この式を解く。

### 3.1.2. Hilber-Hughes-Taylor(HHT)法

Newmark-β法は時刻  $t+\Delta t$  での平衡を満足する解を解くことにするが、HHT 法は  $t_{n+\alpha} = (1-\alpha)t_n + \alpha t_{n+1}$  での平衡を満足する解を解くことにする<sup>[7]</sup>。その定式化は式(55)から少し変形した形になる。

ここで、まず

$$\beta = \frac{(2-\alpha)^2}{4}; \quad \gamma = \frac{3}{2} - \alpha; \quad \frac{2}{3} \leq \alpha < 1 \quad (56)$$

と定義し、式(55)の左辺は

$$\mathbf{K}^* = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\alpha\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{C}^{k-1} + \alpha\mathbf{K}^{k-1} \quad (57)$$

を入れ替えると HHT 法の実装になる。

この方法の特徴は  $\alpha$  の数値変化より、制御可能な数値減衰を取り入れることができる<sup>[7][8]</sup>。 $\alpha=1$  の時、数値減衰は存在せず、 $\gamma=1/2, \beta=1/4$  の Newmark-β法に帰着する。また、 $\alpha=2/3$  の時、数値減衰は最大である。

### 3.1.3. 中央積分法

上記陰解法では、運動方程式としては時刻  $t+\alpha\Delta t$  におけるものを用いた。これに対して、中央差分法は下式に示した時刻  $t$  の運動方程式を基に時刻  $t+\Delta t$  の解を近似的に評価する手法である。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{Q}(t) = \mathbf{F} \quad (58)$$

この時、時刻  $t$  の速度および加速度は

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}(t) &= \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{U}(t+\Delta t) - \mathbf{U}(t-\Delta t)) \\ \ddot{\mathbf{U}}(t+\Delta t) &= \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{U}(t+\Delta t) - 2\mathbf{U}(t) + \mathbf{U}(t-\Delta t)) \end{aligned} \quad (59)$$

と仮定し、これらの式を式(58)に代入し次のように整理する。

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C}(t) \right) \mathbf{U}(t+\Delta t) &= \mathbf{F} - \mathbf{Q}(t) \\ -\frac{1}{t^2} \mathbf{M}(2\mathbf{U}(t) - \mathbf{U}(t-\Delta t)) - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C}\mathbf{U}(t-\Delta t) \end{aligned} \quad (60)$$

減衰マトリクスは比例減衰マトリクス  $\mathbf{C} = \mathbf{R}_m \mathbf{M}$  である場合には、上式は以下に変換することができる。

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{R}_m}{2\Delta t} \right) \mathbf{M}\mathbf{U}(t+\Delta t) &= \mathbf{F} - \mathbf{Q}(t) \\ -\frac{2}{t^2} \mathbf{M}\mathbf{U}(t) - \left( \frac{1}{t^2} - \frac{\mathbf{R}_m}{2\Delta t} \right) \mathbf{M}\mathbf{U}(t-\Delta t) \end{aligned} \quad (61)$$

これより、集中質量マトリクスを採用する時、左辺()内が対角マトリクスとなり、連立方程式を解くことなく右辺ベクトルのみの計算によって  $\mathbf{U}(t+\Delta t)$  を求められる。この手法は動的解析の陽解法とも呼ばれる。

本手法は、いわば外挿によって  $\Delta t$  後の解を評価しているため、運動方程式を解く時間が節約できる反面、 $\Delta t$  を十分小さくとらないと解の安定性が保証されない欠点を併せもっている。

中央積分法を採用する時  $\Delta t$  を十分小さく取る必要があるため、時間増分前後の幾何非線形・材料非線形効果すごく小さいことを考えられる。この条件を考慮し、Advance/FrontSTR は中央積分法を採用する際、増分前後の収束条件判定を飛ばし、完全な陽的積分方法を採用している。

### 4. モーダル応答解析

直接積分法は、運動方程式(47)を直接的に解くのに対し、モーダル法では、式(47)の解を下式のように固有モードベクトル  $\mathbf{U}_i$  より表す。

$$\mathbf{U}(t) = \sum_i b_i(t) \mathbf{U}_i \quad (62)$$

このように得られた各モードの応答を重ね合わせるにより、系の応答を求める。上記示した直接時間積分法に対し、多くの場合解析時間が圧倒的に短くなるが

- ・一般的には非線形現象は解析できない
  - ・無視されるモードがあり、何次までの固有モードを使うかで答が変わる
- といったデメリットがある。

上式を式(47)に代入すると下式が得られる。

$$\sum_i \mathbf{M} \mathbf{U}_i \ddot{b}_i(t) + \sum_i \mathbf{C} \mathbf{U}_i \dot{b}_i(t) + \sum_i \mathbf{K} \mathbf{U}_i b_i(t) = \mathbf{F}(t) \quad (63)$$

この式の両側に  $\mathbf{U}_i$  をかけると

$$\sum_i \mathbf{M} \mathbf{U}_i [\ddot{b}_i(t) + (\alpha + \beta \omega_i^2) \dot{b}_i(t) + \omega_i^2 b_i(t)] = \mathbf{F} \mathbf{U}_i \quad (64)$$

が得られる。ここで、固有モードベクトル  $\mathbf{U}_i$  の定義

$$\mathbf{K} \mathbf{U}_i = \omega_i^2 \mathbf{M} \mathbf{U}_i \quad (65)$$

を用いた。さらに、固有モードの直交性を利用し、上式から

$$\ddot{b}_i(t) + (\alpha + \beta \omega_i^2) \dot{b}_i(t) + \omega_i^2 b_i(t) = \mathbf{F} \mathbf{U}_i \quad (66)$$

が得られ、この式から  $b_i(t)$  が得られ、この  $b_i$  は式(62)を代入すると式(47)の解が得られる。また、式(66)は定数係数線形二次非斉次常微分方程式であり、この方程式の初期条件は

$$\mathbf{U}_0 := \mathbf{U}(t=0); \quad \dot{\mathbf{U}}_0 := \dot{\mathbf{U}}(t=0) \quad (67)$$

に対する解は時間に対する積分より得られる。

### 5. 構造要素

Advance/FrontSTR は今まで主にソリッド要素を利用し、連続体の非線形変形解析機能の開発に力

を注いだ。しかし、実解析業務中構造要素の使用も欠かせず、ユーザーからの強い要望を応じ、幾つかの構造要素を開発した。

## 5.1. シェル要素

Advance/FrontSTR Ver.3.0 はシェル要素を含まれたが、それは線弾性問題しか対応できず、しかもソフトウェア設計上非線形解析には全く対応できないようになっていたから、Advance/FrontSTR Ver. 4.0 はゼロからシェル要素の実装を書き換えた。

### 5.1.1. アイソパラメトリックシェル要素

シェル要素は構造要素であり、薄肉構造物の解析に用いられる。本ソフトウェアはアイソパラメトリックシェル要素を使っている。アイソパラメトリックシェル要素は3次元ソリッド要素の厚み方向につぶすように作られているため縮退(degenerated)要素とも呼ばれている。

図10はアイソパラメトリックシェル要素のモデル図を示す。図10より、シェルの中立面は自然座標系 $\xi\eta$ と表し、シェルの厚み方向の座標は $\zeta$ と表す。さらに、 $\xi$ 、 $\eta$ と $\zeta$ は要素内-1から1まで変化すると仮定すると、シェル要素内の任意一点の座標は

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum N_i(\xi, \eta) \left( \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \zeta \mathbf{V}_i \right) \quad (68)$$

で表せる。ここでは $\mathbf{V}_i$ はシェルディレクターであり、その長さはシェルの厚さ $t$ である。

時間ステップ $n$ (時刻 $t$ )から時間ステップ $n+1$ (時刻 $t' = t + \Delta t$ )までの変位増分ベクトル $\mathbf{u}$ は以下となる。

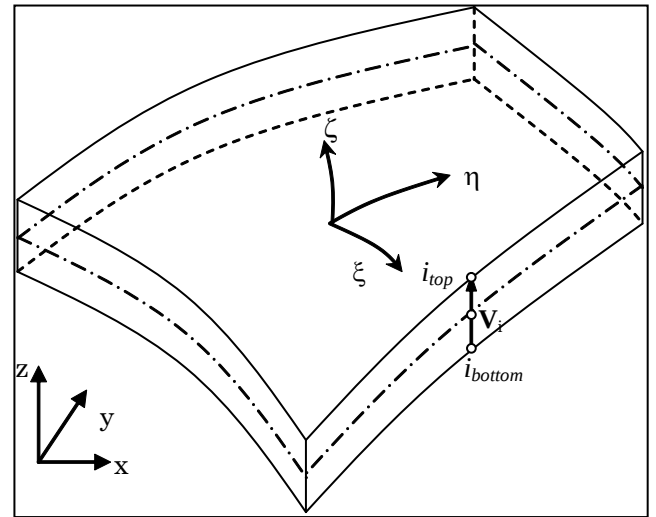


図10 アイソパラメトリックシェル要素

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= {}^t\mathbf{x} - {}^t\mathbf{x} = \sum N_i(\xi, \eta) \left[ ({}^t\mathbf{x}_i - {}^t\mathbf{x}_i) + \frac{t_i}{2} \zeta ({}^t\mathbf{V}_i - {}^t\mathbf{V}_i) \right] \\ &= \sum N_i(\xi, \eta) \left[ ({}^t\mathbf{x}_i - {}^t\mathbf{x}_i) + \frac{t_i}{2} \zeta ({}^{n+1}\mathbf{R}_i - \mathbf{I}) {}^t\mathbf{V}_i \right] \end{aligned} \quad (69)$$

ここで、 $\mathbf{I}$ は単位テンソル、 ${}^{n+1}\mathbf{R}$ はディレクターベクトル ${}^t\mathbf{V}_i$ に対する時間ステップ $n$ から時間ステップ $n+1$ までの有限回転テンソルである。

シェルのディレクター ${}^t\mathbf{V}_i$ の時間ステップ $n \sim n+1$ までの有限回転に関して、回転の間に回転軸は変化しないものと仮定する。このとき回転軸を表すベクトルを軸性ベクトル ${}^{n+1}\boldsymbol{\theta}$ とし、その大きさが有限回転角 $\omega$ を表すとする。

$${}^{n+1}\boldsymbol{\theta} = {}^{n+1}\theta_i \mathbf{e}_i; \text{ 軸性ベクトル} \quad (70)$$

$$\omega = |{}^{n+1}\boldsymbol{\theta}| : \text{ 有限回転角} \quad (71)$$

次に軸性ベクトルを用いて反対称マトリックスを定義する。

$${}^{n+1}\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & -{}^{n+1}\theta_3 & {}^{n+1}\theta_2 \\ {}^{n+1}\theta_3 & 0 & -{}^{n+1}\theta_1 \\ -{}^{n+1}\theta_2 & {}^{n+1}\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (72)$$

上記において、 ${}^{n+1}\theta_i$ はディレクターベクトル ${}^{n+1}\boldsymbol{\theta}$ の第 $i$ 成分であり、回転マトリックス ${}^{n+1}\mathbf{R}$ により変形の都度、更新するものとする。有限回転は微小回転の集まりと考えれば、有限回転テンソルは以下の

ようにあらわすことができる。

$${}^{n+1}_n\mathbf{R} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \mathbf{I} + \frac{1}{n} {}^{n+1}_n\Phi \right)^n = \quad (73)$$

$$\mathbf{I} + {}^{n+1}_n\Phi + \frac{1}{2!} ({}^{n+1}_n\Phi)^2 + \frac{1}{3!} ({}^{n+1}_n\Phi)^3 + \dots$$

式(73)を式(69)に代入すれば、変位ベクトルの離散形が得られる。特に、回転角は十分小さい場合は、以下の式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \sum N_i(\xi, \eta) \left( \begin{Bmatrix} U_{1i} \\ U_{2i} \\ U_{3i} \end{Bmatrix} + \frac{t}{2} \zeta \begin{bmatrix} 0 & V_{3i} & -V_{2i} \\ -V_{3i} & 0 & V_{1i} \\ V_{2i} & -V_{1i} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{1i} \\ \theta_{2i} \\ \theta_{3i} \end{Bmatrix} \right) \quad (74)$$

### 5.1.2. MITC シェル要素

シェル要素の大きさとシェルの厚さの比は大きくなると、Shear Locking する問題があることが知られている。この問題を回避できる MITC 要素が注目されている。

Shear Locking は実際によく使用される低次元要素に関して面外せん断ひずみエネルギーが過剰に評価されることより発生するといわれており、MITC 要素ではその対策として面外せん断ひずみ成分を取り去る方法がとられている。

その具体的方法として、まず、面内ひずみは3次元ソリッドと同様に変位の形状関数を微分して求める。次に面外ひずみについては、サンプリング点について面外ひずみを求めたのち、要素内任意点についてはサンプリング点を補間することにより求める。

また、有限回転の場合にも適用できるように、埋め込み座標系でのひずみ成分を用いる。埋め込み座標としては、アイソパラメトリック要素における自然座標系を用いる。

#### (1) MITC4 シェル要素

MITC4 シェル要素[9]では、面外ひずみの補間に用いるサンプリング点△は図 11 に示す A,B,C,D の4点とする。このとき、面外ひずみの計算は下式に示す。

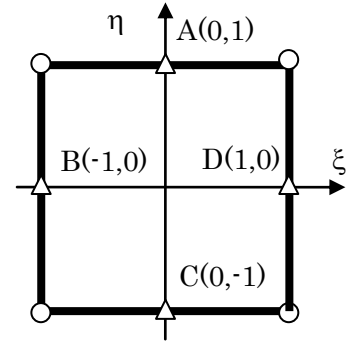


図 11 面外せん断ひずみのサンプリング点(MITC4)

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(1+\eta)\varepsilon_{\xi\xi}^A + \frac{1}{2}(1-\eta)\varepsilon_{\xi\xi}^C \quad (75)$$

$$\varepsilon_{\eta\xi} = \frac{1}{2}(1+\xi)\varepsilon_{\eta\xi}^D + \frac{1}{2}(1-\xi)\varepsilon_{\eta\xi}^B$$

#### (2) MITC3 シェル要素

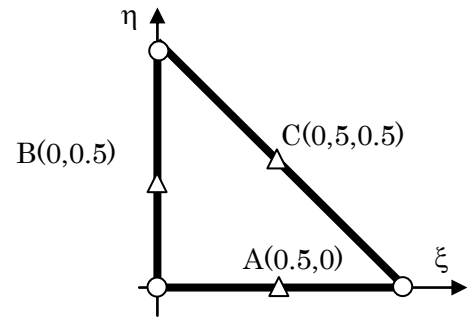


図 12 面外せん断ひずみのサンプリング点(MITC3)

MITC3 シェル要素[10]では、面外ひずみの補間に用いるサンプリング点△は図 12 に示す各辺の中央点をとっている。ξ、ηは要素内0から1まで変化すると仮定し、図 12 には各サンプリング点の自然座標を示している。このとき、面外ひずみの計算は下式に示す。

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \varepsilon_{\xi\xi}^A + c\eta$$

$$\varepsilon_{\eta\xi} = \varepsilon_{\eta\xi}^B - c\xi \quad (76)$$

$$c = \varepsilon_{\eta\xi}^B - \varepsilon_{\xi\xi}^A - \varepsilon_{\eta\xi}^C + \varepsilon_{\xi\xi}^C$$

## (3) MITC8 シェル要素

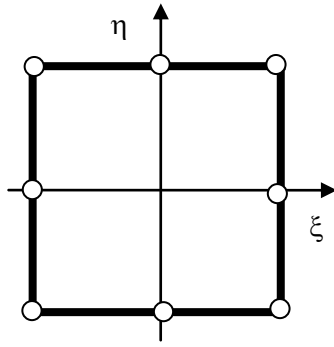
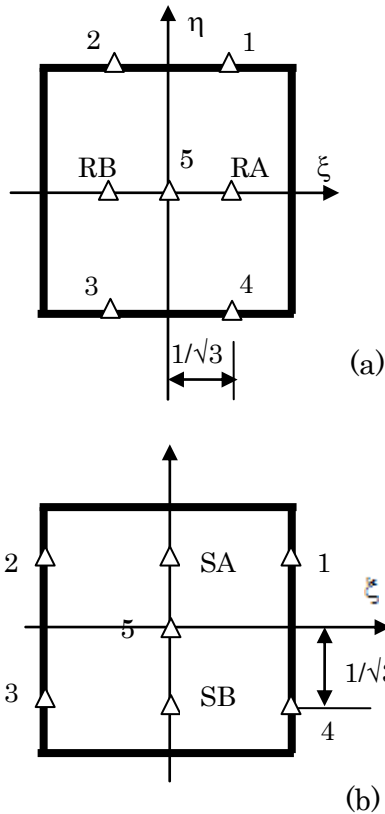


図 13 MITC8 節点位置

図 14 (a)  $\varepsilon_{\xi\zeta}$  を計算用サンプル点; (b)  $\varepsilon_{\xi\zeta}$  を計算用サンプル点位置

MITC8 シェル要素[11]は図 13 に示しているでは 8 節点○四辺体シェル要素である。その面外ひずみ  $\varepsilon_{\xi\zeta}$  は図 14(a) に示したサンプル点を用い以下のように計算する。

$$\varepsilon_{\xi\zeta} \mathbf{g}^{\xi} \mathbf{g}^{\zeta} = \sum_{i=1}^4 h_i^{\xi\zeta} \tilde{\varepsilon}_{\xi\zeta} \mathbf{g}^{\xi} \mathbf{g}^{\zeta}|_i +$$

$$h_5^{\xi\zeta} \left[ \frac{1}{2} (\tilde{\varepsilon}_{\xi\zeta}|_{RA} + \tilde{\varepsilon}_{\xi\zeta}|_{RB}) \right] \mathbf{g}^{\xi} \mathbf{g}^{\zeta}|_5 \quad (77)$$

ここでは、 $a = 1/\sqrt{3}$

$$h_1^{\xi\zeta} = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{\xi}{a} \right) (1 + \eta) - \frac{1}{4} h_5^{\xi\zeta}$$

$$h_2^{\xi\zeta} = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\xi}{a} \right) (1 + \eta) - \frac{1}{4} h_5^{\xi\zeta}$$

$$h_3^{\xi\zeta} = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\xi}{a} \right) (1 - \eta) - \frac{1}{4} h_5^{\xi\zeta}$$

$$h_4^{\xi\zeta} = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{\xi}{a} \right) (1 - \eta) - \frac{1}{4} h_5^{\xi\zeta}$$

$$h_5^{\xi\zeta} = \left( 1 + \left( \frac{\xi}{a} \right)^2 \right) (1 - \eta^2)$$

また、面外ひずみ  $\varepsilon_{\eta\zeta}$  は図 14(b) に示したサンプル点を用い以下のように計算する。

$$\varepsilon_{\eta\zeta} \mathbf{g}^{\eta} \mathbf{g}^{\zeta} = \sum_{i=1}^4 h_i^{\eta\zeta} \tilde{\varepsilon}_{\eta\zeta} \mathbf{g}^{\eta} \mathbf{g}^{\zeta}|_i +$$

$$h_5^{\eta\zeta} \left[ \frac{1}{2} (\tilde{\varepsilon}_{\eta\zeta}|_{RA} + \tilde{\varepsilon}_{\eta\zeta}|_{RB}) \right] \mathbf{g}^{\eta} \mathbf{g}^{\zeta}|_5$$

ここでは、 $a = 1/\sqrt{3}$

$$h_1^{\eta\zeta} = \frac{1}{4} (1 + \xi) \left( 1 + \frac{\eta}{a} \right) - \frac{1}{4} h_5^{\eta\zeta} \quad (78)$$

$$h_2^{\eta\zeta} = \frac{1}{4} (1 - \xi) \left( 1 + \frac{\eta}{a} \right) - \frac{1}{4} h_5^{\eta\zeta}$$

$$h_3^{\eta\zeta} = \frac{1}{4} (1 - \xi) \left( 1 - \frac{\eta}{a} \right) - \frac{1}{4} h_5^{\eta\zeta}$$

$$h_4^{\eta\zeta} = \frac{1}{4} (1 + \xi) \left( 1 - \frac{\eta}{a} \right) - \frac{1}{4} h_5^{\eta\zeta}$$

$$h_5^{\eta\zeta} = \left( 1 + \left( \frac{\eta}{a} \right)^2 \right) (1 - \xi^2)$$

## (4) MITC6 シェル要素

MITC6 シェル要素[10]は図 15 に示している六節点○シェル三角形要素である。その面外ひずみの補間に用いるサンプリング点△は図 15 に示している。ここでは  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{s}_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ ,  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{s}_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$  である。この時、面外ひずみの計算は下式に示す。

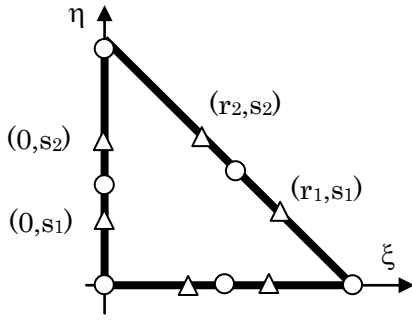


図 15 面外せん断ひずみのサンプリング点(MITC6)

$$\varepsilon_{\xi\zeta} = a_1 + b_1\xi + c_1\eta \quad (79)$$

$$\varepsilon_{\eta\zeta} = a_2 + b_2\xi + c_2\eta$$

ここでは

$$a_1 = \hat{m}_{\xi\zeta}^{(1)} - \hat{l}_{\xi\zeta}^{(1)}; \quad b_1 = 2\hat{l}_{\xi\zeta}^{(1)}$$

$$a_2 = \hat{m}_{\eta\zeta}^{(2)} - \hat{l}_{\eta\zeta}^{(2)}; \quad b_2 = 2\hat{l}_{\eta\zeta}^{(2)}$$

$$c_1 = (a_2 + c_2 - a_1) - (\hat{m}_{\eta\zeta}^{(3)} + \hat{l}_{\eta\zeta}^{(3)} - \hat{m}_{\xi\zeta}^{(3)} - \hat{l}_{\xi\zeta}^{(3)}) \quad (80)$$

$$b_2 = (a_1 + b_1 - a_2) + (\hat{m}_{\eta\zeta}^{(3)} - \hat{l}_{\eta\zeta}^{(3)} - \hat{m}_{\xi\zeta}^{(3)} + \hat{l}_{\xi\zeta}^{(3)})$$

$$\hat{m}_{jt}^{(i)} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{1jt}^{(i)} + \varepsilon_{2jt}^{(i)}), \hat{l}_{jt}^{(i)} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{2jt}^{(i)} - \varepsilon_{1jt}^{(i)})$$

## 5.2. 梁要素

梁要素は代表的な構造要素であり、断面の寸法が長手方向の寸法より十分に小さいスレンダーな部材からなる構造物の解析に使用される。梁要素の基本的な仮定はその断面が変形しないことであり、この要素を採用する時この仮定は満足するのかを十分に注意する必要がある。

アイソパラメトリック梁要素は3次元ソリッド要素の断面方向につぶすように作られているため縮退要素である。本ソフトはアイソパラメトリック梁要素を使っている。

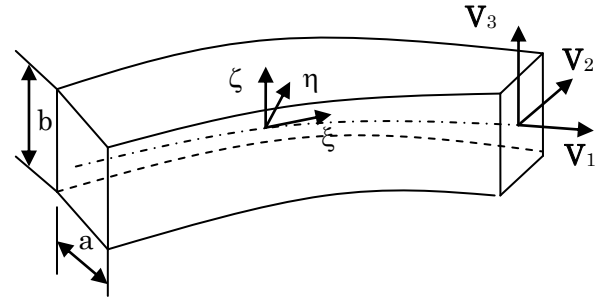


図 16 アイソパラメトリック梁要素

図 16 はアイソパラメトリック梁要素のモデル図を示す。梁の中立軸は自然座標系のξ軸と、断面はη-ζ面とそれぞれ写像関係にある。また、各節点は初期状態において、局所座標系の方向を示す単位直交ベクトル  $\mathbf{V}_i (i=1\sim 3)$  を有している。

梁要素内の任意一点の座標は

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i \left( \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \frac{a}{2}\eta \begin{Bmatrix} V_{21}^i \\ V_{22}^i \\ V_{23}^i \end{Bmatrix} + \frac{b}{2}\zeta \begin{Bmatrix} V_{31}^i \\ V_{32}^i \\ V_{33}^i \end{Bmatrix} \right) \quad (81)$$

時間ステップ  $n$  (時刻  $t$ ) から時間ステップ  $n+1$  (時刻  $t'=t+\Delta t$ ) までの変位増分ベクトル  $\mathbf{u}$  は以下となる。

$$\mathbf{u} = {}^{t'}\mathbf{x} - {}^t\mathbf{x} =$$

$$\sum_{i=1}^n N_i(\xi) \left[ ({}^{t'}\mathbf{x}_i - {}^t\mathbf{x}_i) + \frac{a}{2}\eta ({}^{t'}\mathbf{v}_2 - {}^t\mathbf{v}_2) + \frac{b}{2}\zeta ({}^{t'}\mathbf{v}_3 - {}^t\mathbf{v}_3) \right] \quad (82)$$

$$= \sum_{i=1}^n N_i(\xi) \left[ \mathbf{u} + \frac{a}{2}\eta ({}^{n+1}\mathbf{R}_i - \mathbf{I}) {}^t\mathbf{v}_2 + \frac{b}{2}\zeta ({}^{n+1}\mathbf{R}_i - \mathbf{I}) {}^t\mathbf{v}_3 \right]$$

ここで、 $\mathbf{I}$  は単位テンソル、 ${}^{n+1}\mathbf{R}$  はディレクターベクトル  ${}^t\mathbf{v}_i$  に対する時間ステップ  $n$  から時間ステップ  $n+1$  までの有限回転テンソルである。

${}^t\mathbf{v}_i$  の時間ステップ  $n \sim n+1$  までの有限回転に関して式(71)-(73)に議論したが、式(73)を上式に代入すると、以下の式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) \left( \begin{Bmatrix} U_{1i} \\ U_{2i} \\ U_{3i} \end{Bmatrix} + \frac{a}{2}\eta \begin{bmatrix} 0 & V_{23i} & -V_{22i} \\ -V_{23i} & 0 & V_{21i} \\ V_{22i} & -V_{21i} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{1i} \\ \theta_{2i} \\ \theta_{3i} \end{Bmatrix} \right. \\ \left. + \frac{b}{2}\zeta \begin{bmatrix} 0 & V_{33i} & -V_{32i} \\ -V_{33i} & 0 & V_{31i} \\ V_{32i} & -V_{31i} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{1i} \\ \theta_{2i} \\ \theta_{3i} \end{Bmatrix} \right) \quad (83)$$

式(82)と式(83)を利用し、要素内の変位、ひずみを評価することが可能になる。

シェル要素と同様、梁断面寸法は梁要素の長さの比は小さくなると、**Shear Locking** する問題があることが知られている。本ソフトウェアはシェル要素と同様 MITC 法を利用し、せん断ひずみ成分 $\varepsilon_{\xi\eta}$ と $\varepsilon_{\zeta\xi}$ を以下の式より計算する[4]。

$$\varepsilon_{mn} = \sum_{i=1}^{q-1} h_i^* \varepsilon_{mn} \Big|_{G_i}^{DI} \quad (84)$$

ここでは、 $q$ は要素形状関数の数であり、 $h_i^*$ はせん断ひずみ計算用形状関数である。また、 $\varepsilon_{mn} \Big|_{G_i}^{DI}$ はサンプリング点のせん断ひずみ成分 $\varepsilon_{\xi\eta}$ と $\varepsilon_{\zeta\xi}$ である。これらのサンプリング点の位置は図17に示している。

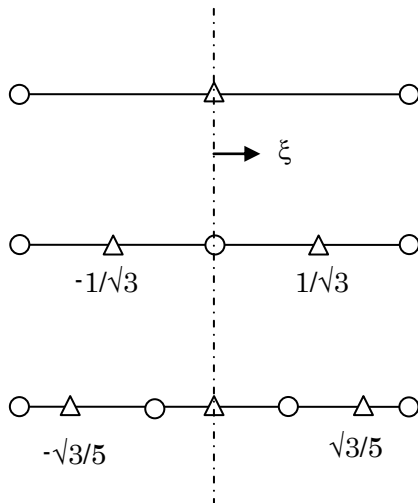


図 17 2 節点、3 節点、4 節点梁要素のサンプリング点位置 (△)

### 5.3. トラス要素

トラス要素は梁要素と同じく断面の寸法が長手方向の寸法より十分に小さいスレンダーな部材からなる構造物の解析に使用されるが、曲げに対する抵抗は示さず部材方向に沿った引張りや圧縮の軸力のみを受け持つという力学的性質を有する。また、圧縮の軸力を受け持つことができないトラス要素はケーブル要素と呼ぶ。

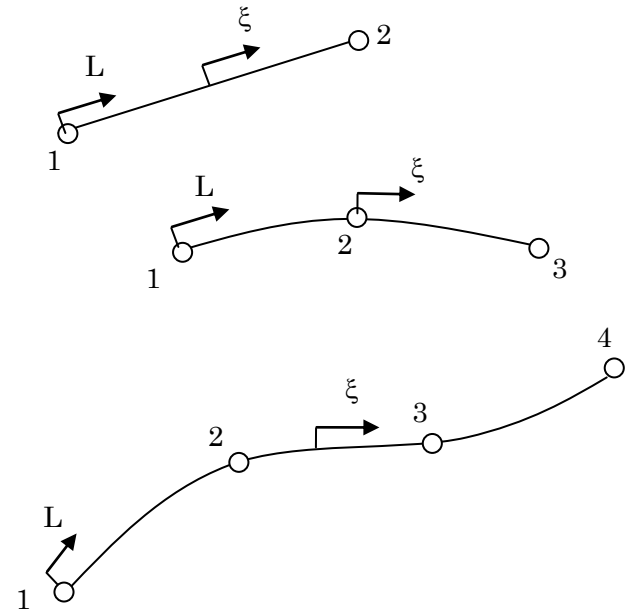


図 18 2 節点、3 節点、4 節点トラス要素

トラス要素内の任意一点の座標および変位は以下である。

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{j=1}^n N_j(\xi) x_j^i \\ u_i &= \sum_{j=1}^n N_j(\xi) u_j^i \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (85)$$

トラス要素内の応力はトラス断面の正応力しかないので、その長手方向のひずみだけを考慮すればいい。その時のトラス長手軸上 Green-Lagrange ひずみは

$$\varepsilon_{11} = \frac{dX_i}{dL} \frac{du_i}{dL} + \frac{d^t u_i}{dL} \frac{du_i}{dL} + \frac{1}{2} \frac{du_i}{dL} \frac{du_i}{dL} \quad (86)$$

である。ここでは、 $L$ は曲線の長さであり、

$$dL(\xi) = \sqrt{\frac{dX dX}{d\xi d\xi}} d\xi \quad (87)$$

この問題の Jacobian は

$$J = \frac{dL}{d\xi} = \sqrt{\frac{dX dX}{d\xi d\xi}} \quad (88)$$

であり、式(85)から

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{J^2} \frac{dx du}{d\xi d\xi} + \frac{1}{J^2} \frac{d^t u du}{d\xi d\xi} + \frac{1}{2J^2} \frac{du du}{d\xi d\xi} \quad (89)$$

この式に(84)を代入すると

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{J^2} \mathbf{X}^T \mathbf{N}_k^T \mathbf{N}_k \mathbf{u} + \frac{1}{J^2} \mathbf{U}^T \mathbf{N}_k^T \mathbf{N}_k \mathbf{u} + \left( \frac{1}{J} \mathbf{N}_k \mathbf{u} \right)^T \left( \frac{1}{J} \mathbf{N}_k \mathbf{u} \right) \quad (90)$$

が得られ、この式は Green-Lagrange ひずみの有限要素離散式である。

また、Update Lagrange 法を採用する時、対数ひずみを利用する、この時

$$l(\xi) = \sqrt{\frac{dx}{d\xi} \frac{dx}{d\xi}} d\xi \quad \varepsilon_{11} = \ln \frac{dl}{dL} \quad (91)$$

である。

#### 5.4. マス要素

マス要素の使用により、剛性慣性を指定節点に取り付けることができる。マス要素自体は剛性がない。

節点位置は剛体の質量中心であることを仮定している。剛体の質量は質量密度 $\rho$ の積分である。

$$m = \int_V \rho dV \quad (92)$$

剛体は回転慣性を有する時、その主軸を $\mathbf{e}_\alpha$ ,  $\alpha=1, 2, 3$  指定する必要がある。また、節点位置は剛体の質量中心を仮定しているため

$$\int_V \rho x_\alpha dV = 0; \quad \int_V \rho x_\alpha x_\beta dV = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \quad (93)$$

その主軸 $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$ に対する二次モーメントは以下である。

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_V ((x_2)^2 + (x_3)^2) dv \\ I_{22} &= \int_V ((x_3)^2 + (x_1)^2) dv \\ I_{33} &= \int_V ((x_1)^2 + (x_2)^2) dv \end{aligned} \quad (94)$$

### 6. 検証例題

#### 6.1. 粘弾性時間積分精度の検証計算

この検証計算は長さ 10, 半径 1 の円棒の一端を固定し、もう一端は時刻 0 の時 100 の面荷重を受け、50s 後の変形を計算する。理論解を持つ単純な変形であるが、Advance/FrontSTR は実装している粘弾性計算精度を検証するのは目的である。

検証に使用している材料モデルは図 19 に示した

2つのバネと 1 つダッシュポットからなり、そのせん断緩和係数は以下になる。

$$G(t) = G \left( \mu_0 + \mu_1 \exp \left( \frac{-t}{\tau_1} \right) \right) \quad (95)$$

ここでは、バネ  $k_1$  は線弾性材料であり、そのヤング率およびポアソン比はそれぞれ 10000 と 0.4833 であり、 $k_2$  とダッシュポットと表す係数は以下である。

$$\mu_0 = 0.01; \mu_1 = 0.99; \tau_1 = 0.901 \quad (96)$$

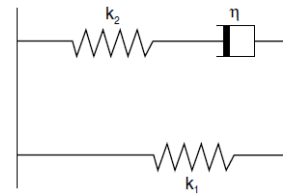


図 19 粘弾性材料モデル

この問題の理論解から、外力が受けた方向のひずみの時間分布は以下である。

$$\varepsilon = 0.1(1 - 0.9e^{-t/10}) \quad (97)$$

Advance/FrontSTR と理論解の比較は図 20 に示している。

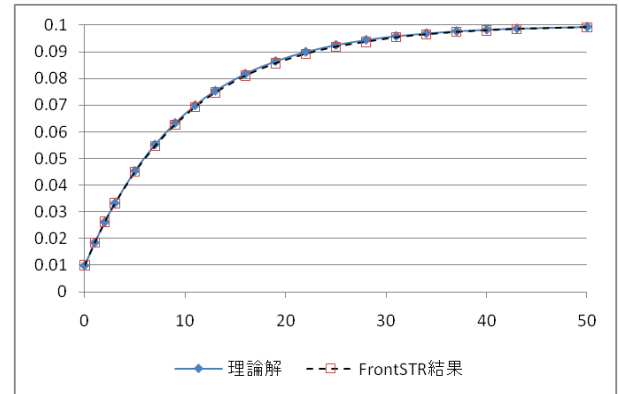


図 20 外力が受けた方向ひずみの時間履歴

#### 6.2. シェル要素の精度検証計算

##### 1. Clamped plate

図 21 に示すような中央一点に集中荷重  $P=100$  を受ける平板の変形を解析した、板の四辺を完全に固定され、この時作用点の変位の理論解（例え[13]）は以下である。

$$w_c = \frac{5.605 \cdot 10^{-3} L^2}{D} p \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (98)$$

ここではE,  $\nu$ とhはそれぞれヤング率、ポアソン比と板厚である。

節点数は11×11、MITC4とMITC3を利用し計算し、荷重点の変位を理論値と比較した。結果を表2に示す。

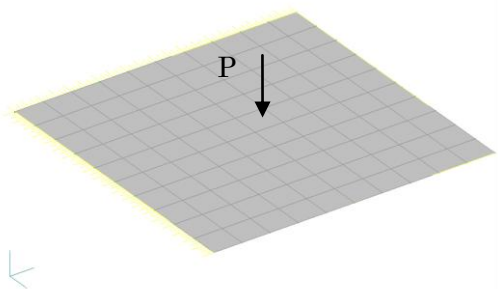


図 21 Clamped plate モデル

表 2 荷重点変位値（理論解=6.762）

| MITC4 | MITC3 |
|-------|-------|
| 6.755 | 6.080 |

## 2. Pinched cylinder

本検証計算は Pinched cylinder 問題を解析し、新しく開発したシェル要素の計算精度を検証するものである。

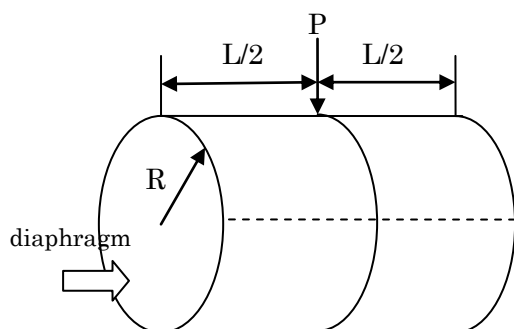


図 22 Pinched cylinder モデル

図22に示すような円筒のモデルを使用した。円筒の中央の上下方向より集中荷重 $P=1$ を作用させ、荷重点の変位を理論値と比較した。対称性があるため、円筒の8分の1をとり計算を行った。境界条件は対称条件の他、円筒の両端においては長さ方向変位を除

いて固定した。有限要素メッシュは図23に示しており、その節点数は周方向と長手方向とも13 節点である。また図中のR は半径で300、Lは全長で600である。また板厚は3.0、ヤング率は $3.0 \times 10^6$ 、ポアソン比は0.3として解析を行った。結果を表3に示す。

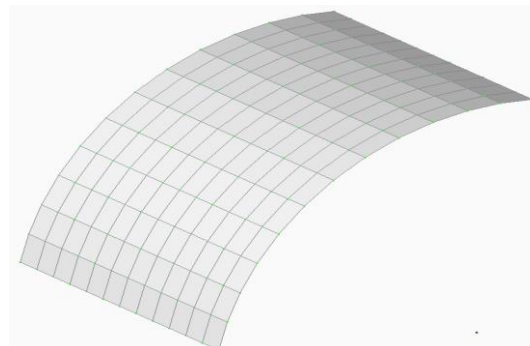


図 23 Pinched cylinder メッシュ

表 3 荷重点変位値（理論解=0.18248×10<sup>-4</sup>）

| MITC4                   | MITC3                   |
|-------------------------|-------------------------|
| 0.1668×10 <sup>-4</sup> | 0.1036×10 <sup>-4</sup> |

## 7. まとめ

本稿は Advance/FrontSTR Ver.4.0 の以下の新規機能を紹介した：

- ・ 材料非線形解析機能  
粘弾性、粘塑性
- ・ 動的解析機能  
非線形動的解析、モーダル応答解析
- ・ 新規要素  
シェル、梁、トラス、マス

## 参考文献

- [1] 久田俊明, 野口裕久, “非線形有限要素法の基礎と応用”, 丸善(1995)
- [2] J.C.Simo, T.J.R. Hughes, Computational Inelasticity, Springer, 1998
- [3] T.J.R. Hughes. The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987
- [4] K.J.Bathe: “Finite Element Procedures in Engineering Analysis”, Prentice-Hall, 1982

- [5] D.F.Schoeberle, and T.Belytschko: “On the Unconditional Stability of an Implicit Algorithm for Nonlinear Structural Dynamics”, J. Appl. Mech., 42(1975), 865-869
- [6] T.J.R.Hughes: “Stability, Convergence, and Growth and Decay of the Averaged Acceleration Method in Numerical Structural Analysis”, Computer & Structures., 6(1976), 313-324.
- [7] H. M. Hilber, T.J.R. Hughes, and R.L. Taylor. Improved numerical dissipation for the time integration algorithms in structural dynamics. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 5(1977),283-292
- [8] H. M. Hilber, T.J.R. Hughes, and R.L. Taylor. Collocation, Dissipation and ‘Overshoot’ for Time Integration Schemes in Structural Dynamics. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 6(1978),99-117
- [9] E.N. Dvorkin, and K.J.Bathe: “A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis”, Eng. Comput., 1(1994), 77-88
- [10] P.S.Lee, K.J. Bathe: “Development of MITC isotropic triangular shell finite elements” Computers & Structures, 82( 2004), 945-962
- [11] K.J.Bathe, E.N.Dvorkin, A formulation of general shell elements-The use of mixed interpolation of tensorial components, Int. J. Num. Methods Eng., 22(1986), 697-722
- [12] T.Belytschko, B.K.Wong & K.Stolarski, Assumed strain stabilization procedure for a 9-node Lagrange shell element, Int.J.Numer.Meth.Engrg., 28(1989), 385-414
- [13] 鷲津、宮本、山田、山本、川井: 有限要素法ハンドブック. 2001 年, P.282~286