

有限要素法による地震断層解析(概要)

菊池 愛子* 董 勤喜*

Earthquake fault analysis by finite element method

Aiko Kikuchi* Qinxi Dong*

日本は世界で有数の地震国であり、特にフィリピン海プレートが沈みこんでいる海溝である南海トラフでは30年以内に高い確率で発生することが予測されている。地震の発生によって、地表がどう動き、地盤内部がどのようなひずみを受けるかを解析する手法を検討し静的地震動解析システムとして開発した。このシステムは大規模並列高速処理機能を持ち、3次元の広域地盤の解析も短時間で行うことができる。本報ではまず解析手法について解説する。ついで、本システムで求めた均質地盤領域の変位解を岡田の理論解と比較して、解析手法の精度を検証するとともに、南海トラフを含む広域地盤における地盤変動解析に適用することにより、システムの有用性、実用性を検証した。

1. はじめに

日本近海は4つのプレート(ユーラシアプレート、北アメリカプレート、太平洋プレート、フィリピン海プレート)が集結する場所である。プレート間では地震が発生するが、このタイプの地震はほぼ周期的に発生することがわかっており、特にフィリピン海プレートが沈みこんでいる海溝である南海トラフでは30年以内に高い確率で発生することが予測されている。

政府の地震調査研究推進本部によると、今後30年以内の発生確率が想定東海地震が87%、東南海地震が60~70%、南海地震が50%程度と予測されている。

一方、地震と火山噴火の連動性が疑われるケースが過去に数例知られており、南海トラフにおける東海、東南海、南海の巨大地震と、富士山噴火との関連を探る研究プロジェクトも文部科学省で立ち上げられた。

富士山では、1707年の宝永噴火が巨大地震の49日後に始まった例がある一方、地震後も沈黙を保ったり、逆に地震の前に噴火したりしたこともある。巨大地震の震源域となる海底のプレート(岩

板)と富士山のマグマだまりは地理的に近く、プレートのひずみの力が伝わるなど何らかの関係はあると考えられている。地震と火山を地下で起きた物理現象として一体的にとらえる見方が強まっている。

このような情勢を鑑み、ここでは、プレート間断層を震源とする地震が火山周辺などの地盤に及ぼす変位や応力の変化を具体的に評価できる解析手法を検討し、実際の地震断層滑りの影響を解析するシステムを開発した。

2. 解析概要

本解析手法としては、火山などの地形や局所的な地殻構造の効果を適切に評価することを可能にするために、差分法ではなく形状表現能力に優れる有限要素法(FEM)を用いることとする。

地震は断層滑りにより引き起こされる。断層滑りは体積変化を伴わないせん断変形であり、大規模な地殻の変形を引き起こす。断層滑りによる力は合力も合トルクも零となり、互いに大きさが同じで符号の異なる1対の力として表現される。これはsplit node方法の活用により表現することとする。

一方、合理的な計算時間で計算することは広域

*アドバンスソフト株式会社 技術第5部

5th Technical Division, AdvanceSoft Corporation

地盤を扱う大規模地震動解析において必須の技術であると考えられる。

従って、地震動解析をする際の断層を split node 方法で扱う既往の論文の記述部分を参考にして、そのアルゴリズムを構造解析プログラム Advance/FrontSTR に組み込むことで 3 次元地震動解析を取り扱えるようとする。上記プログラムは静的な方程式の解法について直接法のみならず、共役勾配法 (CG 法) を具備しており、大規模並列計算機能により大規模モデルも高速に解析できる。

また、システムには、断層面を構成する要素生成処理、地球内部構造の自動組入れおよび無限要素の追加開発など、地震動解析を FEM で解く際に必要となる機能を組み込んでいる。

以降にプレート運動に伴う応力場変動評価手法の検討およびその解析結果について報告する。

3. 解析手法

本開発コードで用いられる有限要素法による解析手法について示す。

3.1. 微小変形線形弾性静解析

ここでは、微小変形理論に基づく弾性静解析についての定式化を示す。応力・ひずみ関係として線形弾性を仮定している。

3.1.1. 基礎方程式

固体力学の平衡方程式、力学的境界条件、幾何学的境界条件 (基本境界条件) は次式で与えられる。

$$\nabla \sigma + b = 0 \quad \text{in } V \quad (1)$$

$$\sigma n = \bar{t} \quad \text{on } S_t \quad (2)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{on } S_u \quad (3)$$

ここに σ は応力、 b は体積力、 n は境界上の法線ベクトル、 \bar{t} は表面力、 u は変位、 \bar{u} は境界変位、 V は全体領域、 S_t は力学的境界、 S_u は幾何学的境界を表す。

微小変形問題におけるひずみ・変位関係式は次式で与えられる。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

また、線形弾性体での応力・ひずみ関係式 (構成式 Hooke の法則) は、次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\sigma = D\varepsilon \quad (6)$$

ここに、 D は弾性マトリックスである。 λ, μ は Lame 定数を表し、質量密度 ρ 、P 波と S 波の速度から求められる。

$$\lambda = \rho (V_p^2 - 2V_S^2) \quad \mu = \rho V_S^2 \quad (7)$$

3.2. 仮想仕事の原理

基礎方程式(1)~(3)と等価である、微小変形線形弾性問題についての仮想仕事の原理は、次式のように表される。

$$\int_V \sigma^T \delta\varepsilon dV = \int_{S_t} \bar{t}^T \delta u dS + \int_V b^T \delta u dV \quad (8)$$

$$\delta u = 0 \quad \text{on } S_u \quad (9)$$

式(6)を式(8)に代入し、式(8)は次式のように表される。

$$\int_V \varepsilon^T D \delta\varepsilon dV = \int_{S_t} \bar{t}^T \delta u dS + \int_V b^T \delta u dV \quad (10)$$

3.3. 定式化

仮想仕事の原理式(10)を有限要素ごとに離散化して次式を得る。

$$\sum_e \int_{V^e} \varepsilon^T D \delta\varepsilon dV = \sum_e \int_{S_t^e} \bar{t}^T \delta u^T dS + \sum_e \int_{V^e} \delta u^T b dV \quad (11)$$

要素ごとに、要素を構成する節点の変位を用いて変位場を次式のように内挿する。

$$u = \sum_{i=1}^m N_i u_i = \mathbf{N} \mathbf{U} \quad (12)$$

このときひずみは、式(4)を用いて次式のように与えられる。

$$\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{U} \quad (13)$$

ここに、 B はひずみ一変位マトリックスである。

式(12)、(13)を式(11)に代入して、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \sum_e \delta \mathbf{U}^T \left(\int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{U} \\ &= \sum_e \delta \mathbf{U}^T \int_{S_t^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \sum_e \delta \mathbf{U}^T \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)は、次式のようにまとめることができる。

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F} \quad (15)$$

ここに

$$\mathbf{K} = \sum_e \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (16)$$

$$\mathbf{F} = \sum_e \int_{S_t^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV \quad (17)$$

式(16)、(17)で定義されるマトリクスおよびベクトルの成分は、有限要素ごとに計算し、重ねあわせることができる。

式(15)が、任意の仮想変位 $\delta \mathbf{U}$ について成立することにより次式を得る。

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (18)$$

一方、変位境界条件式(3)は、次式のように表される。

$$\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}} \quad (19)$$

式(18)を拘束条件式(19)のもとで解くことにより、節点変位 \mathbf{U} を決定することができる。

3.4. 離散化

3.4.1. 六面体要素

離散化に用いる要素の例として図 1 に示すような 8 節点立方体要素について示す。形状関数は、次式を用いる。

$$\begin{aligned} N_1(r, s, t) &= (1-r)(1-s)(1-t)/8. \\ N_2(r, s, t) &= (1+r)(1-s)(1-t)/8. \\ N_3(r, s, t) &= (1+r)(1+s)(1-t)/8. \\ N_4(r, s, t) &= (1-r)(1+s)(1-t)/8. \\ N_5(r, s, t) &= (1-r)(1-s)(1+t)/8. \\ N_6(r, s, t) &= (1+r)(1-s)(1+t)/8. \\ N_7(r, s, t) &= (1+r)(1+s)(1+t)/8. \\ N_8(r, s, t) &= (1-r)(1+s)(1+t)/8. \end{aligned} \quad (20)$$

ここに、 r, s, t は正規化された座標内の評価点座標を表す。

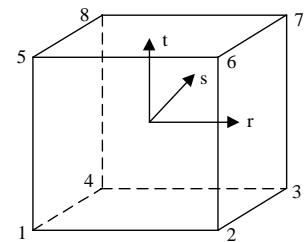


図 1 8 節点局所立方体要素

形状関数を r, s, t にて微分を行うと、 $i=1, \dots, 8$ に対して次式を得る。

$$\begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial r} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \end{cases} \quad (21)$$

マトリックス表現をすると、

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial r} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial r} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial r} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial s} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial s} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial t} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial t} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial t} z_i \end{bmatrix} \quad (23)$$

アイソパラメトリック表示では、座標変換行列と形状関数は一致するので、形状関数を x, y, z にて微分を行うと、 $i=1, \dots, 8$ に対して次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial s}{\partial z} & \frac{\partial t}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (24)$$

ひずみー変位マトリックス $[B]$ は、次式を表す

$$[B] = [[B_1] \ [B_2] \ \cdots \ [B_8]]$$

ここに、 B_i は $i = 1, \dots, 8$ に対して次式で与えられる。

$$B_i^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (25)$$

剛性行列は

$$K_{ij} = \int_V B_i^T D B_j dV \quad (26)$$

で与えられる。

3.5. Split Node 方法による断層の導入

3.5.1. Split Node 方法

H.J. Melosh の論文[1]により有限要素法を用いて地震動解析をする場合において split node technique で断層滑りのモデル化を実現できることが確認されている。

split node technique によれば、単一の節点に対し、それにつながる要素によって異なる節点変位を与えることができる。つまり断層面の上方と下方で異なる変位を持つことができる。このことにより解析対象物の全体剛性マトリックス、変位ベクトルの形を変化させずに、地震断層の滑り変位による影響を荷重ベクトルの変更のみで、処理することができる。

従って断層滑りのために解くべき方程式の自由度数を増加させる必要がなく、計算時間を増大させない方法である。大規模な断層滑りに対して特に効力を発揮すると考えられる。

アルゴリズムは以下のように示される。

図 2 に示す 2 つの要素を考える。要素 2 の節点 2、と要素 1 の節点 1 は全体剛性を組み上げた時に同一節点となるが、それぞれ相異なる変位を持つとする。

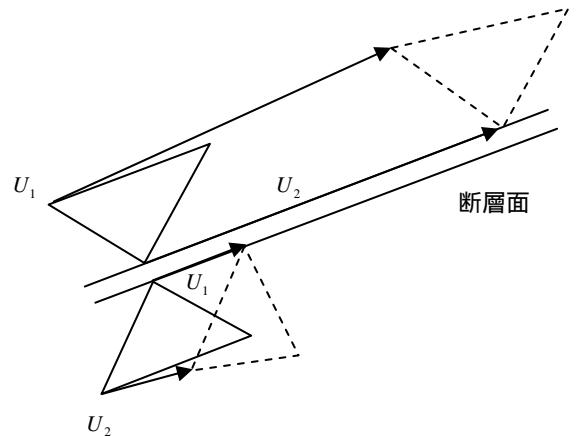


図 2 要素における変位

2 点の変位を同一視するために、各要素における変位を以下のように表す。

$$\begin{aligned} U_2 &= U_2 + \Delta U_2 \\ U_1 &= U_2 + \Delta U_1 \end{aligned} \quad (27)$$

上式で U_2 、 U_1 が相異なる実際の変位を示す。 U_2 を全体に組み上げられた時の変位とし、 U_2 に対する各要素における変位増分を ΔU_2 、 ΔU_1 と表す。断層滑りを表すために ΔU_2 、 ΔU_1 にすべり量の $1/2$ 、 $(-1) \times$ すべり量の $1/2$ を与える。変位増分の影響を荷重項として処理すれば、式 (28)となり全体の方程式を組み立てることができる。全体系での求解変位を U_2 とし、各節点の変位は図 3 のように示される。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} + K_{11} & K_{12} \\ 0 & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - K_{12} \Delta U_2 \\ F_2 - K_{22} \Delta U_2 - K_{11} \Delta U_1 \\ F_3 - K_{21} \Delta U_1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

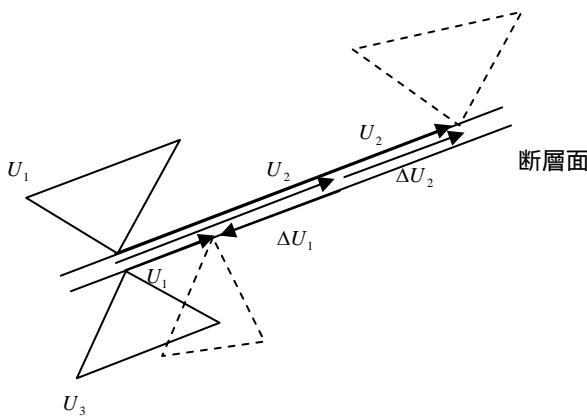


図 3 全体構造における変位

3.5.2. 断層変位による等価節点力

断層の走向角 (strike angle) θ 、傾斜角 (dip angle) δ 、滑り角 (rake angle) λ および滑り変位 D_0 は図 4 に示すように定義される。一般的には構造の全体座標系は x 軸を East、 y 軸を North、 z 軸を上方にとられる。

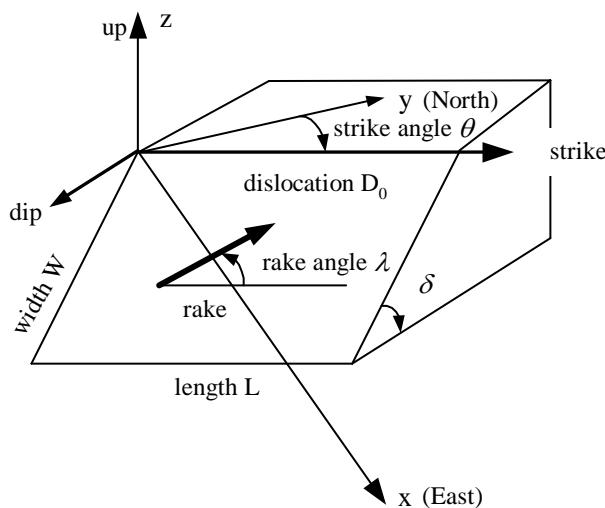


図 4 断層パラメータの定義

本報では断層滑りを表現するために、断層面上に XY 面を持つ断層座標系を以下のように定義する。

全体座標系をその Z 軸周りに $(\pi/2 - \theta)$ 回転した後、この回転後の X 軸周りで δ 回転し、その後の Z 軸周りに λ 回転させて得られた座標系を断層座標系とする。

式(28)における断層の滑り変位ベクトルは全体

座標系における表示であるので、ユーザーが入力する断層座標系における滑りの変位ベクトルを全体座標系に変換する必要がある。断層座標系から、全体座標系への変換式は、式(29)のように定義される。

$$u = [T_3 \cdot T_2 \cdot T_1]U \quad (29)$$

ここで、

$$T_1 = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & \sin \delta \\ 0 & -\sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。

断層面は多数の有限要素の表面の集合として形成される。従って断層面に所属する要素表面ごとに要素番号と節点番号を抽出し、断層面に所属する要素節点を対象に等価節点力を計算する。例えば、断層面に所属する要素において節点 j が、断層面に所属する場合は、節点 j の 3 方向自由度の滑り変位である Δu_{3j-2} 、 Δu_{3j-1} 、 Δu_{3j} を入力データファイルから読み込み、式(31)を実行する。同じ要素内であっても断層に所属しない節点については実行しない。断層に所属する全ての要素節点の等価力を計算したら、全体荷重ベクトルにアセンブルする。

$$\{F_e^{fault}\} = - \sum_{i,j=1}^n [k_{ij}]_{3n \times 3n} \begin{Bmatrix} \Delta u_{3j-2} \\ \Delta u_{3j-1} \\ \Delta u_{3j} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

等価節点力のイメージとして平面問題について示せば図 5 のようになる。

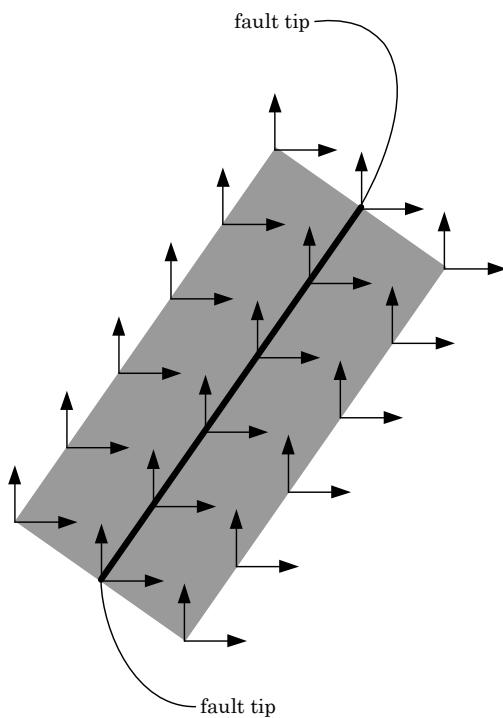


図 5 断層変位による等価要素節点力

3.6. 無限要素

地盤は無限遠方まで連続しているが、有限要素法では、このような開領域の取り扱いが困難である。通常の有限要素法のままでは対象領域の外まで解析範囲を十分に広くとり、境界の影響を少なくすることが考えられるが、それにより解析規模が多くなり、計算時間や容量が膨大となり不合理である。

従って開領域を扱うために、半無限境界を表す要素として無限要素を採用した。地表面を除く構造の水平方向および深さ方向の端部境界において無限要素を設置する。以下に無限要素の一例として、六面体要素の基礎方程式を以下に示す。

3.6.1. 8 節点六面体無限要素

Zienkiewicz[2]により静的な解析をする時の無限要素の定式化がされている。局所座標 ξ は無限方向に拡張するとなる。 $\xi = +1$ は、無限点を代表する。

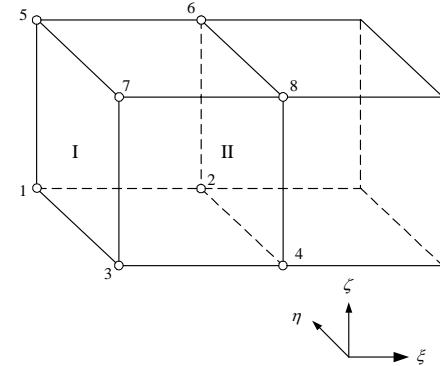


図 6 8 節点無限要素

図 6 に示す線形無限要素に対して、座標変換は式(32)に与えられる。

$$\begin{aligned} x = & N_1(\eta)N_1(\zeta)[(2x_1 - x_2)\tilde{N}_0(\xi) + x_2\tilde{N}_2(\xi)] \\ & + N_2(\eta)N_1(\zeta)[(2x_3 - x_4)\tilde{N}_0(\xi) + x_4\tilde{N}_2(\xi)] \\ & + N_1(\eta)N_2(\zeta)[(2x_5 - x_6)\tilde{N}_0(\xi) + x_6\tilde{N}_2(\xi)] \\ & + N_2(\eta)N_2(\zeta)[(2x_7 - x_8)\tilde{N}_0(\xi) + x_8\tilde{N}_2(\xi)] \end{aligned} \quad (32)$$

式(32)を整理すると、式(33)になる。

$$\begin{aligned} x = & 2N_1(\eta)N_1(\zeta)\tilde{N}_0(\xi)x_1 + N_1(\eta)N_1(\zeta)(\tilde{N}_1(\xi) - \tilde{N}_0(\xi))x_2 \\ & + 2N_2(\eta)N_1(\zeta)\tilde{N}_0(\xi)x_3 + N_2(\eta)N_1(\zeta)(\tilde{N}_2(\xi) - \tilde{N}_0(\xi))x_4 \\ & + 2N_1(\eta)N_2(\zeta)\tilde{N}_0(\xi)x_5 + N_1(\eta)N_2(\zeta)(\tilde{N}_1(\xi) - \tilde{N}_0(\xi))x_6 \\ & + 2N_2(\eta)N_2(\zeta)\tilde{N}_0(\xi)x_7 + N_2(\eta)N_2(\zeta)(\tilde{N}_2(\xi) - \tilde{N}_0(\xi))x_8 \end{aligned} \quad (33)$$

ここに、 N_1 と N_2 は、標準的な有限要素形状関数である。

$$N_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta_i\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta)$$

$$N_2(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta_i\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)$$

$$N_1(\zeta) = \frac{1}{2}(1 + \zeta_i\zeta) = \frac{1}{2}(1 - \zeta)$$

$$N_2(\zeta) = \frac{1}{2}(1 + \zeta_i\zeta) = \frac{1}{2}(1 + \zeta)$$

\tilde{N}_0 と \tilde{N}_2 は、以下の式(34)で定義される。

$$\tilde{N}_0(\xi) = \frac{-\xi}{1 - \xi} \quad \tilde{N}_2(\xi) = 1 + \frac{\xi}{1 - \xi} \quad (34)$$

式(34)により、以下の式を得られる。

$$\tilde{N}_2(\xi) - \tilde{N}_0(\xi) = 1 + \frac{\xi}{1-\xi} + \frac{\xi}{1-\xi} = \frac{1+\xi}{1-\xi}$$

式(33)により、以下の式を得られる。

$$H_1(\xi, \eta, \zeta) = 2N_1(\eta)N_1(\zeta)\tilde{N}_0(\xi) = 2 \times \frac{1}{2}(1+\eta) \times \frac{1}{2}(1-\zeta) \times \frac{-\xi}{1-\xi} = -\frac{1}{2}\xi(1+\eta)(1-\zeta)/(1-\xi)$$

$$H_2(\xi, \eta, \zeta) = N_1(\eta)N_1(\zeta)(\tilde{N}_2(\xi) - \tilde{N}_0(\xi)) = \frac{1}{2}(1+\eta) \times \frac{1}{2}(1-\zeta) \times \frac{1+\xi}{1-\xi} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)/(1-\xi)$$

$$H_3(\xi, \eta, \zeta) = 2N_2(\eta)N_1(\zeta)\tilde{N}_0(\xi) = 2 \times \frac{1}{2}(1-\eta) \times \frac{1}{2}(1-\zeta) \times \frac{-\xi}{1-\xi} = -\frac{1}{2}\xi(1-\eta)(1-\zeta)/(1-\xi)$$

$$H_4(\xi, \eta, \zeta) = N_2(\eta)N_1(\zeta)(\tilde{N}_2(\xi) - \tilde{N}_0(\xi)) = \frac{1}{2}(1-\eta) \times \frac{1}{2}(1-\zeta) \times \frac{1+\xi}{1-\xi} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)/(1-\xi)$$

$$H_5(\xi, \eta, \zeta) = 2N_1(\eta)N_2(\zeta)\tilde{N}_0(\xi) = 2 \times \frac{1}{2}(1+\eta) \times \frac{1}{2}(1+\zeta) \times \frac{-\xi}{1-\xi} = -\frac{1}{2}\xi(1+\eta)(1+\zeta)/(1-\xi)$$

$$H_6(\xi, \eta, \zeta) = N_1(\eta)N_2(\zeta)(\tilde{N}_2(\xi) - \tilde{N}_0(\xi)) = \frac{1}{2}(1+\eta) \times \frac{1}{2}(1+\zeta) \times \frac{1+\xi}{1-\xi} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)/(1-\xi)$$

$$H_7(\xi, \eta, \zeta) = 2N_2(\eta)N_2(\zeta)\tilde{N}_0(\xi) = 2 \times \frac{1}{2}(1-\eta) \times \frac{1}{2}(1+\zeta) \times \frac{-\xi}{1-\xi} = -\frac{1}{2}\xi(1-\eta)(1+\zeta)/(1-\xi)$$

$$H_8(\xi, \eta, \zeta) = N_2(\eta)N_2(\zeta)(\tilde{N}_2(\xi) - \tilde{N}_0(\xi)) = \frac{1}{2}(1-\eta) \times \frac{1}{2}(1+\zeta) \times \frac{1+\xi}{1-\xi} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)/(1-\xi)$$

再整理すると、図 6 の左側面の形状関数は、以下

3.6.2. 定式化

(a) 座標と変位変換

無限要素の座標変換は有限要素の座標変換と同じで無限要素の形状関数から座標変換ができる。

$$\begin{cases} H_1(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2}\xi(1+\eta)(1-\zeta)/(1-\xi) \\ H_3(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2}\xi(1-\eta)(1-\zeta)/(1-\xi) \\ H_5(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2}\xi(1+\eta)(1+\zeta)/(1-\xi) \\ H_7(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2}\xi(1-\eta)(1+\zeta)/(1-\xi) \end{cases} \quad (35)$$

図 6 の右側面の形状関数は、以下の式(36)により定義される。

$$\begin{cases} H_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)/(1-\xi) \\ H_4(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)/(1-\xi) \\ H_6(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)/(1-\xi) \\ H_8(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)/(1-\xi) \end{cases} \quad (36)$$

局所から全体変位も推定される。

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^8 H_i(\xi, \eta, \zeta) u_i \\ v &= \sum_{i=1}^8 H_i(\xi, \eta, \zeta) v_i \\ w &= \sum_{i=1}^8 H_i(\xi, \eta, \zeta) w_i \end{aligned} \quad (38)$$

(b) ひずみ

無限要素のひずみは、次式で定義される。

$$\{\varepsilon\}^{(e)} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^T = [B]\{\delta\}^{(e)} \quad (39)$$

ここに、 $\{\delta\}^{(e)}$ は要素の節点変位ベクトルである。

$$\{\delta\}^{(e)} = \{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots, u_8, v_8, w_8\}^T \quad (40)$$

$[B]$ はひずみ一変位マトリックスである。

$$[B] = [B_1, B_2, \dots, B_8] \quad (41)$$

ここに、

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \partial H_i / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial H_i / \partial y & 0 \\ \partial H_i / \partial y & 0 & \partial H_i / \partial z \\ 0 & \partial H_i / \partial z & 0 \\ \partial H_i / \partial z & 0 & \partial H_i / \partial x \end{bmatrix} \quad (42)$$

$(i = 1, 2, \dots, 8)$

(c) 応力

無限要素の応力計算は、通常の有限要素と同じに次式で定義される。

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}^{(e)} \quad (43)$$

(d) 剛性マトリックス

仮想仕事の原理を無限要素ごとに離散化して、次式(44)を得る。

$$\begin{aligned} \{\delta\}^T \{F\} &= \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\delta\}^T [B]^T [D] [B] \{ \delta \} dV \\ &= \{\delta\}^T \int_V [B]^T [D] [B] dV \{ \delta \} \end{aligned} \quad (44)$$

ここに、

$$\{F\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] J |d\xi d\eta d\zeta| \cdot \{ \delta \} \quad (45)$$

$$[K] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] J |d\xi d\eta d\zeta| \quad (46)$$

を解析し、岡田の理論解 4)との比較を行った。要素は原則として精度の良い六面体を使用するが、断層面近傍には形状表現のため 4 面体、5 面体も使用した。断層面の滑りは SplitNode 機能で扱い、半無限境界の処理は無限要素を使用した。

まず有限要素メッシュのみのモデルの解析を実施して、要素や SplitNode 機能の精度を把握し、ついで無限要素を加えたモデルを解析して無限要素の影響を把握する。

解析条件を、以下に示す。

地盤内部に断層滑りを与える

(震央は地表面中央)

傾斜角 : $\delta = 30^\circ$

すべり量 : $U_1=0\text{m}$, $U_2=1\text{m}$, $U_3=0\text{m}$

断層の深さ : $d=40\text{km}$

地盤規模 : $L=W=150\text{km}$, 250km の 2 ケース

断層面規模 : $l=w=50\text{km}$

地盤の材質 : $E=100\text{GPa}$, $\nu = 0.25$

図 7 に解析モデルを示す。要素分割モデルを図 8 に示す。

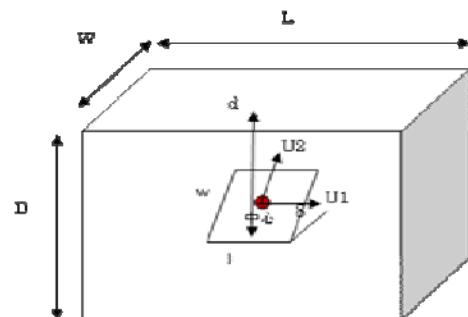


図 7 均質地盤の解析モデル

4. 検証解析

4.1. 岡田理論解との比較

4.1.1. 解析モデル

静的地震動解析システムの精度を検証するため、均質地盤を対象に断層滑りを与えた時の変形

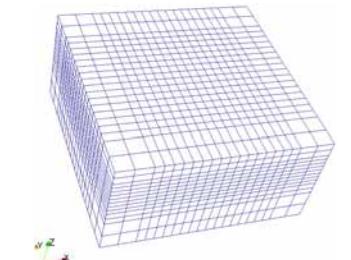
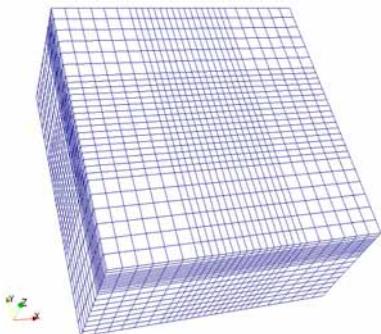
(a) $150 \times 150 \times 75\text{km}$ (b) $250 \times 250 \times 150\text{km}$

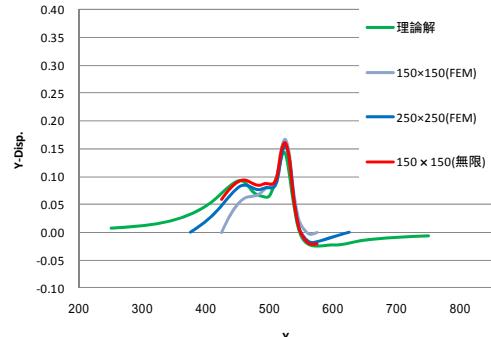
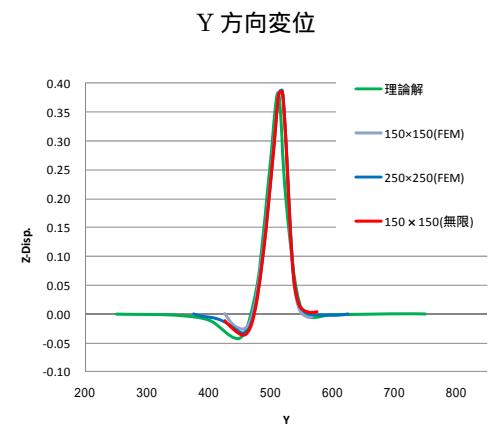
図 8 要素分割モデル

注) 無限要素は有限要素領域の側面および底面に貼付した。無限遠点で変位 = 0 となる。

XY 方向のメッシュ幅は中央 $100\text{km} \times 100\text{km}$ で 6.25km 、その外側では 12.5km としている。深さ Z 方向は地表面から 11.132km までは 5.5662km ピッチ、そこから 40km までは 3.6084km ピッチ、さらに 50km までは 5km ピッチ、それより下は 12.5km ピッチとしている。

4.1.2. 解析結果

地表面変位の水平(Y)方向と鉛直(Z)方向成分を震央を通る X 軸方向ベクトル、Y 軸方向ベクトルにそって抽出し、理論解と比較して図 9 に示す。グラフ中で震央は 500km の位置である。

(a) $150 \times 150 \times 75\text{km}$ 

Y 方向変位

Z 方向変位

図 9 地表面の変位
(単位: 变位 - m, 軸座標 - km)

図中の変位ピーク値は両方向変位ともにモデル化範囲によらず有限要素モデルと理論解とほぼ一致していることがわかる。これにより開発システムにおける静的地震動解析機能がほぼ妥当であることがわかる。

一方、Y 方向変位のグラフに見られるように、ピークから離れた裾野の部分ではモデル化範囲によって大きく挙動が異なっている。モデル化範囲がモデル化範囲が小さくなるに従い理論解から離れる傾向が見られる。これは有限要素のみのモデルの場合は、モデル化範囲の端部を拘束しているために端部変位が 0 となる影響が表れたものである。無限要素を用いた場合は変位のピークから離れた裾野の部分でも理論解と比較的よく一致していることがわかり、無限要素の効果が確認できる。

4.2. 過去の研究事例との比較

開発システムの精度を実際の地盤を対象に断層滑りを与えた例で検証する。ここでは南海地震を対象に、吉岡等⁵⁾によって発表された論文との比較を行う。断層滑りにより発生した地表面変位の解析結果を比較する。図 10 に解析範囲を示す。過去の研究事例にならって直方体領域（深さ 0 ~ 150km）の地盤をモデル化した。地表面範囲の頂点は、表 1 の 4 点である。

頂点	緯度	経度
1	北緯 30.3 度	東経 132.5 度
2	北緯 32.5 度	東経 139.5 度
3	北緯 36.7 度	東経 138.7 度
4	北緯 34.5 度	東経 130.7 度

表 1 解析地盤領域

過去の事例との比較

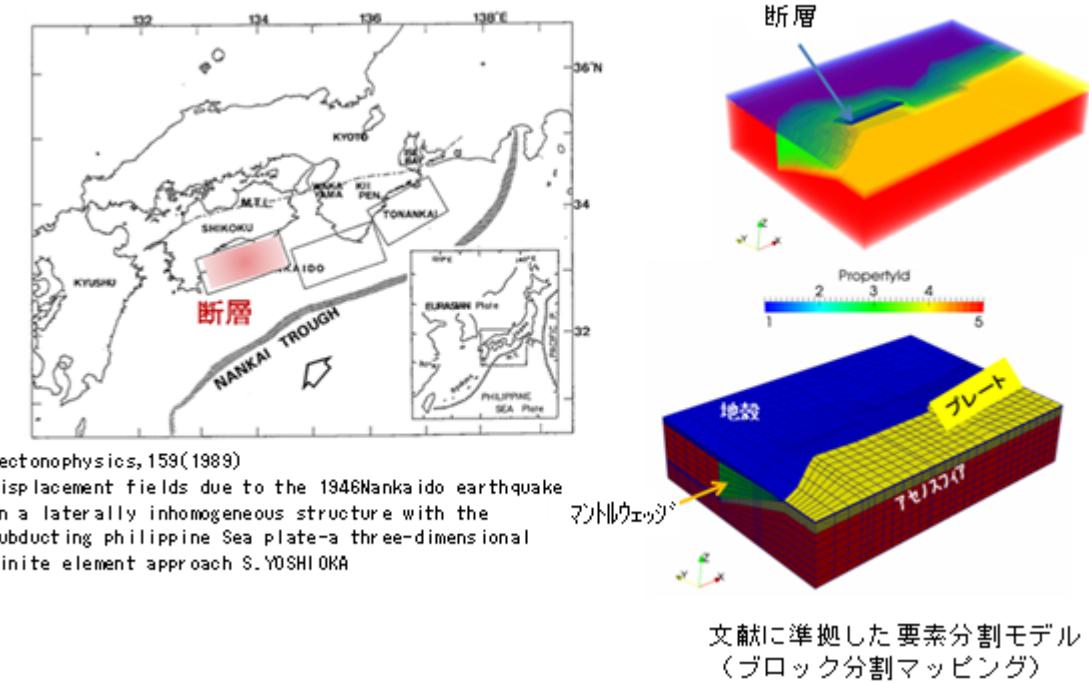


図 10 解析モデル

文献では地盤モデルの要素分割については、断層として南海地震の 2 個所、東南海地震の 1 個所が考慮された形状となっている。今回扱う断層滑りは最も西側の震源のみであるが、できるだけ同一条件で結果を比較するために要素分割は文献とほぼ同様なものとした。表 2 に着目断層の諸元を示す。図 11 にも断層のパラメータを示す。表 3 に材料定数を示す。

表 2 断層滑り諸元

長さ 2L	幅 W	深さ H	走行 角 θ	傾斜 角 δ	すべり角 λ	すべり量
150km	70km	4km	20°	20°	116.6°	6m

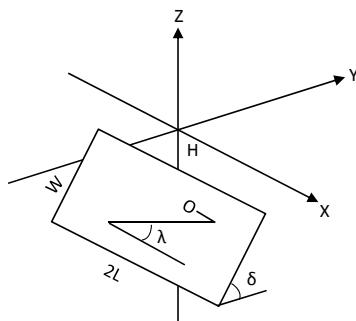


図 11 断層諸元の幾何

表 3 材料定数

	区分	ヤング率 E(GPa)	ポアソン比
1	地殻	32	0.25
2	マントルウェッジ	47	0.30
3	プレート	72	0.25
4	アセノスフィア	67	0.25

境界条件としては地盤の側面および底面に無限要素を張り付けている。従って無限遠点で変位が0となる条件とした。

LL'を結ぶ線上の変位を抽出して文献値と比較した結果を図 12 に示す。

変位の全体的な傾向は良く一致しており、開発システムの機能はほぼ妥当であると推定される。

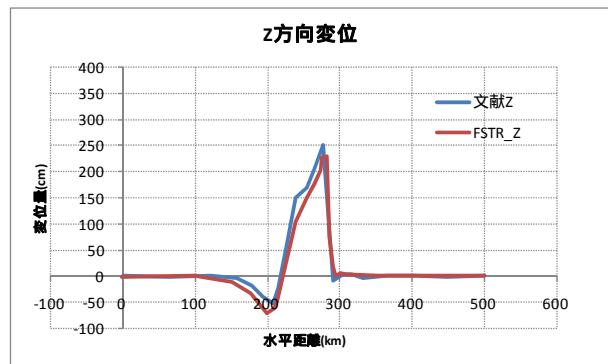
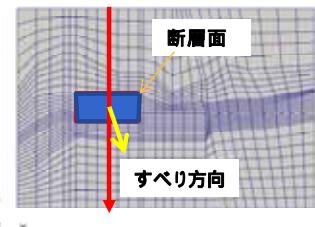


図 12 地表面の変位分布

4.2.1. 東海・東南海・南海地震震源域から富士山までのモデル

実際の広域な地盤領域、想定東海・東南海・南海地震震源域から富士山周辺に至る地域（東西953km × 南北777km × 上下100km）を解析対象として、この領域内に想定する東海・東南海・南海地震の断層面を組み込み、断層滑りが発生した場合の応力場変動を評価した例について報告する。

地盤領域を表 4 に示す。

表 4 解析地盤領域

	緯度	経度
範囲	北緯30~37度	東経130~140度

着目する断層面は図 13 に示す南海地震、東南海地震、東海地震とする。断層面は各々均一なすべり量を持つ4つの四辺形領域として指定した。表 5 に断層面の諸元を示す。東南海・南海の断層面の位置と走行角については文献から、東海の断層面については中央防災会議のHPの中の一例を引用した。

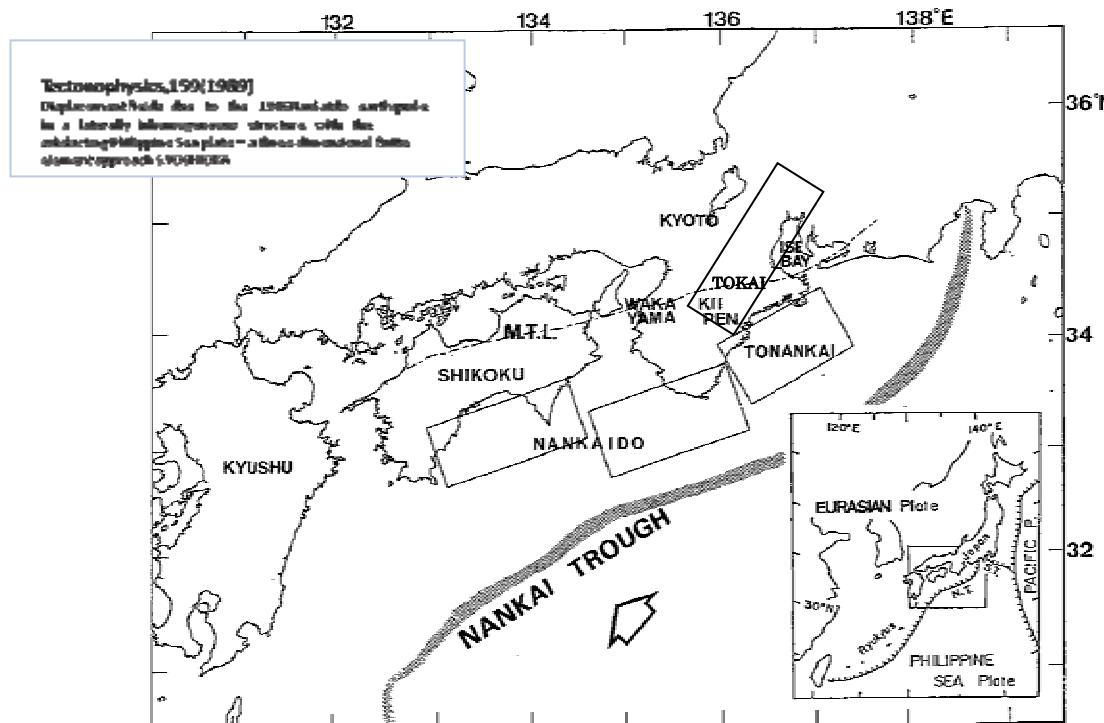


図 13 震源モデル

表 5 断層滑り諸元

断層	長さ 2L	幅 W	深さ H	走行角 θ	傾斜角 δ	すべり角 λ	すべり量
南海(西側)	150km	70km	4km	19.03°	20°	116.6°	6m
南海(東側)	150km	70km	4km	19.44°	25°	116.6°	3m
東南海	130km	70km	4km	30.57°	25°	108°	4m
東海	149km	63km	10km	208°	15°	89°	2.85m

地盤の材質については、システム内蔵の地盤データベースから自動設定した。境界条件については地盤の四方の側面および底面に無限要素を張り付け無限遠点で変位が 0 となる境界条件とした。

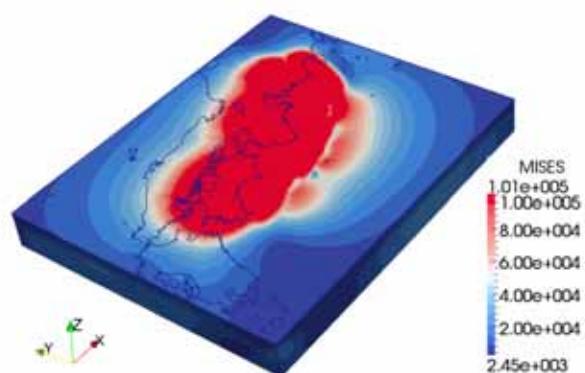
解析モデルはモダラにより自動生成しモデル規模は以下のように設定した。

節点数 : 232,422

要素数 : 220,134 (うち無限要素 18,000)

材質数 : 471

応力分布を次に示す。



地表面および各経度における地中断面の MISES

図 14 地表面の Mises 応力分布

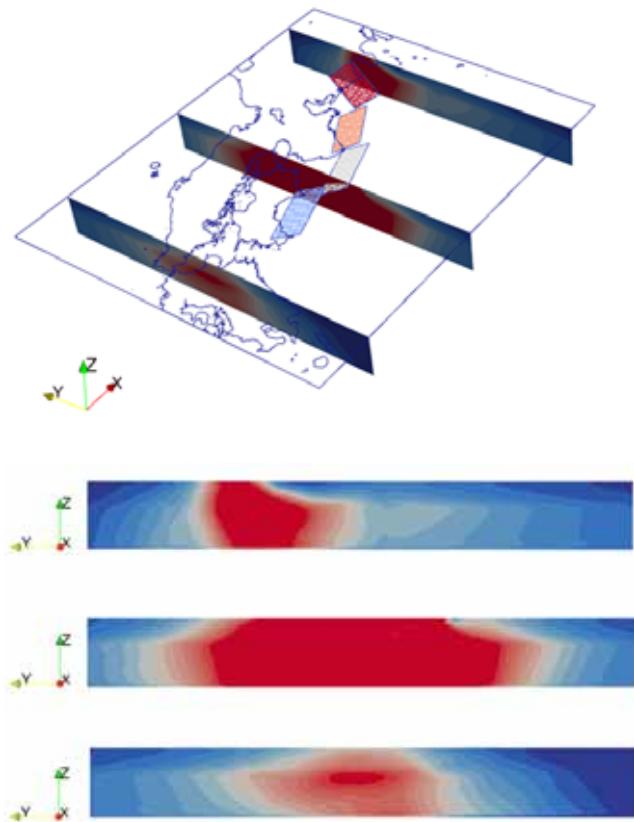


図 15 垂直断面における Mises 応力分布

(上段；東経 135 度 中段；東経 139 度 下段；東経 131.5 度)

5. まとめ

本報では地震断層運動による地盤の変形・応力を解析するために、火山などの地形や局所的な地殻構造の効果を考慮するために形状表現に優れる有限要素法に基づく解析手法について述べた。また、この手法で実際に地盤変動解析システムを開発し、地盤領域の解析を実施した。以下のような成果が得られている。

- 1) 領域外部からの影響を回避する境界条件について検討し、解析領域端部に設置する無限要素機能を開発した。無限要素により解析領域が狭い場合でも無限遠点での拘束となるためピークから離れた裾野の値分布が改善された。
- 2) 本解析手法によるシステムを開発して従来の

研究事例との比較を行い、着目変位の分布が比較的良く整合していることを確認した。また実際の広域地盤の解析も行い、システムの実用性を検証した。

- 3) 開発システムは Advance/FrontSTR を使用することで、大規模並列高速静的地震動解析が可能となった。今後は断層運動による地震の揺れ、地震前後にゆっくりと進行する変動などの動的解析に拡張していく予定である。

6. 謝辞

今回報告したプログラム開発は文部科学省 IT プログラム「戦略的基盤ソフトウェア開発」プロジェクトおよび文部科学省次世代 IT 基盤構築のための研究開発「革新的シミュレーションソフトウェアの開発」プロジェクトの成果を利用したものです。関係各位に深く感謝いたします。

参考文献

- [1] H.J. Melosh and A. Raefsky, A simple and efficient method for introducing faults into finite element computations, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 71, No. 5, pp.1391-1400, October 1981.
- [2] Zienkiewicz, O.C., et al, A novel boundary infinite element, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 19, pp.393-404, 1983.
- [3] M. Matsubara, K. Obara and K. Kasahara, Three-dimensional P- and S- wave velocity structures beneath the Japan Islands obtained by high-density seismic stations by seismic tomography, *Tectonophysics*, 454(2008) 86-103.
- [4] Y. Okada, Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 75, No. 4, pp.1135-1154, August 1985.
- [5] S. Yoshioka, M. Hashimoto and K. Hirahara, Displacement fields due to the 1946 Nankaido earthquake in a laterally inhomogeneous structure with the subducting Philippine Sea plate—a three-dimensional finite element approach, *Tectonophysics*, 159(1989) 121-136.

