

SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) 法の火山現象への応用

井田 喜明*, **, ***

Application of an SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) Method to Volcanic Processes

Yoshiaki Ida*, **, ***

SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) 法は粒子法の一種で、粒子の運動が連続体の変形や流動と明示的に対応づけられることが特徴である。SPH 法が混合物質の変形や流動に容易に対応できることを利用して、マグマの上昇過程に関連する火山現象へ応用する可能性を検討する。特に、揮発性成分の発泡や膨張の効果を含む特異な状態方程式、気相の体積が著しく増えたときの破碎の扱いなどについて独自な方法を提案する。

Key words: SPH method, particle dynamics, two-phase flow, magma, fragmentation

1. はじめに

変形や流動を数値的に解析する手法としては、差分法や有限要素法など、空間に固定した格子やメッシュを用いる方法が多くの実績とともに確立されている。しかし、このような伝統的な手法は、マグマが岩石に貫入して地殻を突き抜け、地表に噴出するような問題には適用が難しい。マグマと岩石の境界は格子やメッシュを超えて大きく移動するが、それに容易に対処できないからである。一般に、複数の物質が関与して、その境界が大きく変形したり移動したりする問題は、空間を離散化の基礎とする伝統的な計算手法が苦手とするところである。このような問題は、物質とともに視点を移動させるラグランジエ流の扱いの方がやり易いので、その考えに立つ粒子法がよく採用される。粒子法を使えば、異なる物質の境界は粒子の初期配列によって自由に設定でき、粒子の運動とともに自動的に移動する。

粒子法の中で最もよく使われる個別要素法 (

* アドバンスソフト株式会社 研究開発センター
Research and Development Center, AdvanceSoft Corporation

** 東京大学 名誉教授

Professor Emeritus, The University of Tokyo

*** 兵庫県立大学 名誉教授

Professor Emeritus, University of Hyogo

DEM, Discrete Element Method) は、粒子間に働く力を直接定義して、その相互作用のもとに運動方程式を解く。具体的には、粒子間がバネやダッシュポットなどでつながれると想定して、物質の弾性や粘性を表現する。しかし、このような粒子間力の物理的な意味は必ずしも明確ではなく、連続体の弾性定数や粘性率とも直接関連づけられない。粉体の流動や岩屑なだれなど、流れや変形が実際に粒子によって引き起こされる場合は別にして、連続体の解析に対する適用は定性的な域を出ない。

それに対して、1977 年に宇宙物理学の分野で開発された SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) 法[1]は、粒子の変形や相互に働く力を連続体力学に沿う形で導入する。SPH 法では、応力や歪など連続媒質の変形を定義する物理量は粒子の分布から計算でき、弾性や粘性などの連続体の性質は粒子の性質として組み込むことができる[2]。その意味で、SPH 法は連続媒質の解析に適した方法であると考えられる。現在までに SPH 法は工学を中心に各種の基礎研究や応用目的に広く使われてきた。特に、自由表面を含む大きな変形、強い衝撃の効果、複数の物質の相互作用などの問題に対する適用例が多い。連続体力学

との対応を意識した方法として、その後日本で MPS (Moving Particle Semi-implicit) 法が開発された[3]が、ここでは実績の豊富な SPH 法について述べることにする。

本稿で主に問題にするのは、2 種類の物質が混合するシステムを SPH 法でどう扱うかにある。岩石中のマグマの上昇など、多くの火山学的な現象の解析でそれが中心的な課題になるからである。2 相流の扱い一般についてもいえることだが、混合物質を SPH 法でどう扱うかはまだ確立されていない部分があり、現在も様々な提案がなされつつある[4],[5]。ここでは、SPH の基本的な処理方法以外には特別な仮定を設けずに問題を定式化する。例えば、種類の異なる粒子の間に特別な相互作用は考えない。物質の種類の違いは、個々の粒子の構成方程式を考えるときにのみ問題にされる。更に、様々な性質を粒子に組み込むことによって、気相を含む特異な状態方程式、破壊や破碎などの現象も、粒子間に特別な相互作用を考えることなしに対処する。

本稿は SPH 法の初步から記述を始める。SPH 法の基本的な枠組みはよく知られたものであるが、その細部に関する理解の仕方や、数値計算における具体的な対処法には、本研究独自のものがあるからである。この一般論に続いて、著者によって組まれた計算プログラムの概要が説明され、それを用いた簡単な計算例が示される。その中でマグマに溶解する揮発性成分の発泡や膨張の扱いについて議論される。火山現象に対する具体的な応用については詳細に立ち入らず、SPH 法の活用方法についてのデザインを述べるにとどめる。火山学的な議論の詳細よりも、同様な考え方で SPH 法を様々な問題にどう用いるかに、読者の興味があると考えるからである。

2. 計算方法

2.1. 空間微分の扱い

連続体の基礎方程式の多くは空間座標の微分を

含む偏微分方程式によって記述される。SPH 法の特徴はこの空間微分の扱いにある[2]。空間座標ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ と時間 t の任意の関数 $f(\mathbf{x}, t)$ を、以下のように平滑化して近似しよう。

$$\langle f \rangle(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}', t) w(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, h) d\mathbf{x}' \quad (1)$$

積分は考慮する空間全体にわたるものとする。平滑化の重みを表わすカーネル関数 $w(\mathbf{x}, h)$ は、原点の周りの幅 h の範囲内でのみ大きな値をとるものを選ぶ。すなわち、(1)は関数 $f(\mathbf{x}, t)$ を \mathbf{x} の周辺の値を用いて平均する。平均の機能を保障するために、カーネル関数には次の規格化の条件を課す。

$$\int w(\mathbf{x}, h) d\mathbf{x} = 1 \quad (2)$$

幅 h が 0 に近づくと、(2)の条件から高さは無限に大きくなり、 $w(\mathbf{x}, h)$ はディラックのデルタ関数 $\delta(\mathbf{x})$ に超関数の意味で収束する。そこで、この極限では平滑化された関数 $\langle f \rangle$ は元の関数 f と厳密に一致する。 h が有限のときには $\langle f \rangle$ と f は完全には一致しないが、その差はここでは無視できるものとし、以下の扱いでは $\langle f \rangle$ と f を同一視する。この仮定は SPH 法の根幹に関わるものであるが、その妥当性についてここでは議論しない。

カーネル関数 $w(\mathbf{x}, h)$ は、 \mathbf{x} が h の範囲から十分に離れたときには実質的にゼロになるので、(1) の微分を部分積分することによって、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle f \rangle(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} &= - \int f(\mathbf{x}', t) w_i(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, h) d\mathbf{x}' \\ w_i(\mathbf{x}, h) &= \frac{\partial w(\mathbf{x}, h)}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (3)$$

更に高次の微分についても類似な式が得られる。

この数学的な基礎のもとに SPH 法の粒子を導入しよう。まず、連続体を適当に分割して、その各部分に「粒子」を割り振る。粒子はその部分の座標 \mathbf{x} (もっと厳密に定義する必要があったら、その中心や重心の座標) を粒子の位置として保有する。連続体の流動や変形とともに、粒子も連続

体の一部として移動し、その位置 x も変化する。粒子に適当に番号をつけ、番号 n を割り振られた粒子の位置を $\mathbf{x}^n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n)$ と書く。粒子の番号 n は、べき乗と紛らわしいが、座標を表す下付きの添え字 i, j などと区別して、上付きの添え字で表記することにする。場所と時間の関数として定義される連続体の任意の物理量 $f(x, t)$ は、その位置に割り振られた粒子 n の物理量とみなして $f^n = f(\mathbf{x}^n, t)$ と書くことにする。 f^n は一般に時間 t の関数である。この理解に従って、粒子 n の速度成分 v_i^n や応力成分 σ_{ij}^n などが定義できる。

粒子 n に割り振られた連続体の体積を V^n として、(1)と(3)の積分を離散化すれば

$$\begin{aligned} f^n &= \sum_m f^m w(\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^n, h) V^m \\ (\frac{\partial f}{\partial x_i})^n &= - \sum_m f^m w_i(\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^n, h) V^m \end{aligned} \quad (4)$$

m に対する和は、実質的には近傍に存在する少数の粒子からの寄与で決まる。その範囲を決めるのが h である。 h の値としては、粒子間隔の数倍程度の値を選ぶのが常識的である。(4) の右辺のように、カーネル関数を用いて計算される和をカーネル平均と呼ぶことしよう。(4)の第 2 式は、粒子 n に割り振られた物理量 f の空間微分の表現である。この式によれば、物理量の空間微分は、カーネル関数の空間微分を用いて、周囲の粒子がもつ元の物理量の分布から求まる。

ここまで議論は暗に 3 次元空間を想定したが、SPH 法を 1 次元や 2 次元の問題に適用する場合にも扱いは同様である。すなわち、(1)～(3)の積分は考慮する次元の積分と理解すればよく、(4)では v^n として粒子の占める長さや面積をとればよい。この点に注意すれば、計算プログラムは次元をほとんど意識せずに作成できる。カーネル関数は通常球対称が仮定されて、距離だけの関数から導かれる。よく使われるのは、距離が $3h$ より大きくなると完全にゼロとなる 5 次式[2]で、ここでもこのカーネル関数を採用する。その関数形を図 1 に示

す。

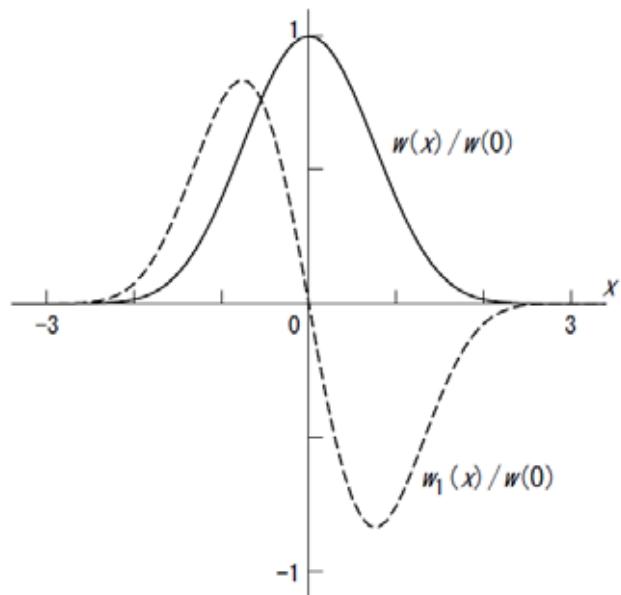


図 1 距離だけに依存する 5 次の代数方程式で決められたカーネル関数 $w(x)$ とその微分 dw/dx のグラフ。 $w(x, h)$ を $x = x_i$ 、 $h = 1$ として $w(x)$ と書く。

2.2. 粒子の運動

連続体の運動方程式は、よく知られた以下の形に書かれる。

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{\rho} \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + g_i \quad (5)$$

ここで ρ 、 v_i 、 σ_{ij} は連続体の密度、速度、応力である。 g_i は連続体の単位質量あたりに働く実体力（単位は加速度）で、ここでは重力を考える。2.1 節の定義に従って、粒子 n の密度 ρ^n 、速度成分 v_i^n 、応力成分 σ_{ij}^n を定義すれば、(4)の第 2 式を使って、運動方程式(5)は次のように離散化される。

$$\frac{dv_i^n}{dt} = -\frac{1}{\rho^n} \sum_j \sum_m \sigma_{ij}^m w_j(\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^n, h) V^m + g_i \quad (6)$$

(5)の左辺は連続体と一緒に動く視点に立つ時間微分（ラクランジェ流の微分）なので、(6)ではそれをそのまま粒子の時間微分で置き換えた。(6)は粒子の運動を粒子間の相互作用の形で表現しており、粒子の運動方程式とみなすことができる。

同様に、連続体の質量保存の式（連続の方程式）

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = - \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (7)$$

から、粒子の密度変化を記述する以下の式が得られる。

$$\frac{1}{\rho^n} \frac{d\rho^n}{dt} = \sum_i \sum_m v_i^m w_i(\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^n, h) V^m \quad (8)$$

カーネル平均の計算で用いる粒子の体積 v^n は、初期体積と(8)で得られた密度変化から計算する。

応力を計算するための構成方程式は、物質の種類や性質に依存する。粒子は元の連続体の種類や性質をそのまま引き継ぐものと理解する。粒子が粘性流体を表現する場合（このような粒子を流体粒子と呼ぼう）には、粘性率 η と第2粘性率 ζ を含むニュートンの関係式

$$\sigma_{ii} = \delta_{ij}(-p + \xi \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k}) + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (9)$$

に、状態方程式と速度勾配の表現に対応する次の2式を代入して、粒子の応力 σ_{ij}^n を計算する。

$$\begin{aligned} p^n &= p_o + K \left[\frac{\rho^n}{\rho_o} - 1 \right] \\ \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^n &= - \sum_m v_j^m w_i(\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^n, h) V^m \end{aligned} \quad (10)$$

粒子が弾性体を表現する固体粒子の場合には、ラメの定数 λ と μ を含むフックの法則を時間で微分した式

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = \lambda \delta_{ij} \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (11)$$

を(10)の第2式と組み合わせて用いる。この場合、応力はこれを時間積分することで得られる。

(9)～(11)を用いて求めた各粒子の応力を、(6)や(7)と組み合わせることで、ある時間ステップでの粒子の位置、速度、密度から、次の時間ステップの状態を計算することができる。初期条件から出発して、この手順を繰り返すことで、任意の時間における粒子の状態が求まる。時間積分は通常陽解法で実行するので、積分の時間刻みはクーラン条件[6]を満たして、粒子間隔と音速の比より短く選ばなければならない。

以下に述べる計算プログラムでは、カーネル平均を計算する際に粒子の種類や性質を区別しない。粒子の種類や性質の違いは、構成方程式を用いる場合にだけ考慮される。例えば、固体粒子と流体粒子が共存する系で、(6)、(8)、(10)などで粒子についての和をとるとときには、固体粒子の寄与と流体粒子の寄与を同等に扱う。固体粒子と流体粒子の違いは、構成方程式として(9)と(11)のどちらを選択するかを決める際にのみ考慮される。このような単純化によって、異なる粒子の境界付近では連続体の境界条件とのずれが生ずる可能性があるが、ここではそれに対して特別な対応をとらない。

3. 計算プログラムの作成と運用

3.1. 計算プログラムの作成

2節で述べた手順に従って、粒子の変形や流動をSPH法で計算するプログラムをC++言語で開発した。以下にその概要を述べる。並行して、計算結果を図示するプログラムと、計算結果から特定の粒子の性質などを抽出するプログラムも作成した。一連のプログラムの使用法はホームページ形式のマニュアルに書かれている。これらについて詳細な情報が必要な場合は、著者に問い合わせて欲しい。

図2にプログラムを構成する関数の関係を図示する。

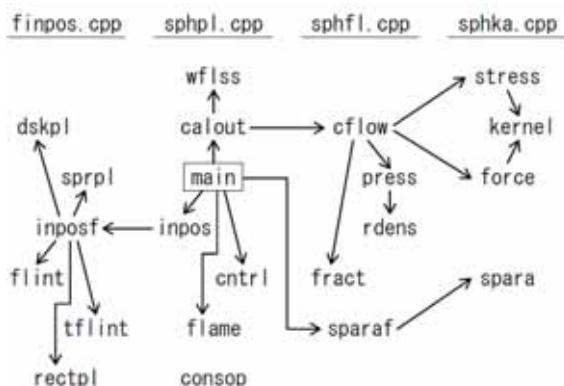


図2. SPH法による計算プログラム sphpl の構造。プログラムを構成する関数は、4つのファイル sphpl.cpp, sphfl.cpp, sphka.cpp, finpos.cpp に分けておかれる。

ソース・コードは 4 つのファイルに分割されておかれる。sphpl.cpp ファイルは、プログラム全体を管理する関数と入出力を分担する関数から構成される。sphfl.cpp ファイルには、粒子の状態や運動を管理し計算する関数が含まれる。カーネル平均の計算に関わる部分は、sphkl.cpp ファイルに属する関数によって実行される。finpos.cpp は粒子の初期配列をいくつかの標準的なケースについて設定する関数群から成る。

プログラムの実行は sphpl.cpp ファイルにおかれた関数 main から始まる。main により、まず関数 contrl が呼ばれて、制御データを contrl.dat ファイルから読み込む。次に関数 inpos が呼ばれて、粒子の初期配列と初期状態が inpos.dat ファイルを用いて設定される。その設定には、contrl.dat ファイル中のパラメータの値に対応して、複数の方法が選択でき、inpos.dat ファイルの形式はその選択内容によって異なる。選択のひとつに、inpos.dat ファイルに書き込まれたパラメータによって簡易に設定する方法があり、それに対処する関数群が finpos.cpp ファイルに準備されている。

制御データが読み込まれ、粒子の初期条件が設定されると、関数 flame が呼ばれて、粒子系の次元、粒子の間隔や分布範囲などが求められる。また、関数 sparaf と spara が呼ばれて、sphfl.cpp ファイルと sphkl.cpp ファイルに所属する関数群のために、共有パラメータの値が設定される。これらの準備が終わると、関数 calout が呼ばれて、粒子の運動と状態変化の計算が始まる。計算が進行する過程で、計算結果は随時 result.dat ファイルや monit.dat ファイルなどに書き込まれる。計算が終わると、継続計算のために、粒子の最終状態が inpos_c.dat ファイルに書き込まれる。計算の進行状況は、関数 consop によって consop.txt ファイルに記録される。会話型でプログラムを実行する場合には、同じ内容はコンソール上に刻々と出力される。

各時間ステップにおける計算の制御は、calout

に呼ばれて関数 cflow が行う。cflow は関数 stress を呼び、(9)式や(11)式に従って応力を計算する。また、関数 press を呼んで、状態方程式から圧力を計算する。更に、粒子の速度変化（加速度）を計算するために、関数 force を呼んで運動方程式(6)の右辺第 1 項を求める。これらの結果を集約して、cflow は粒子の位置と状態の変化を計算し、次の時間ステップに対応する粒子の新しい状態を得る。この新しい状態が破壊や破碎の条件を満たすかどうかの判定や、条件を満たした場合における破壊や破碎の処理は、関数 fract が行う。一連の計算途上でカーネル関数やその微分の値が必要になると、関数 kernel がそれを提供する。火山学的な応用で使われる特別な機能は、関数 press や fract に準備される（第 4 章参照）。

プログラムはパソコンの windows 上でも大型計算機でも実行できる。大型計算機で実行する場合には、並列計算処理にも対応できるようになっている。並列化への対処は、カーネル平均を計算する部分についてなされ、全粒子の状態変数を共有しながら、各粒子の計算を複数の cpu に分割する方式がとられる。並列計算で 32 個以下の cpu を使う場合は、計算時間がほぼ cpu に反比例する割合で短縮され、1 度の並列化効率が達成された。cpu の数が更に増えると、並列化効率は落ちるが、256 個の cpu でも 0.3 度の効率が得られた。

3.2. 浮力で上昇する円筒

作成したプログラムの実行例として、2 次元の長方形の容器に置かれた円筒状の物体が、浮力で上昇する問題を考える。容器は最上部に近い位置まで粘性流体で満たされており、流体の深部には 2 次元の円筒状の物体が底から多少離しておかれている（図 3 左）。容器の大きさは横 48 m、縦 64 m である。円筒状の物体は、弾性体の場合と粘性流体の場合を考える。いずれの場合も、円筒の初期密度は周囲の流体の半分なので、円筒は浮力を

受けて浮き上がる。この初期状態を SPH 法の粒子で表現したのが図 3 右である。各粒子の位置は円で示す。粒子は 1.0 m の一定間隔で格子状に配列され、円筒を表現する粒子、容器を満たす流体粒子、容器を表現する固定粒子の 3 種類に分けられる。使われた粒子の総数は 3095 個である。各粒子の物性は図中や図の説明に書かれているが、いずれもマグマにほぼ相応する値である。なお、円筒の位置は容器の中心から多少水平にずらしてある。こうしておかないと、中心に位置する粒子が対称性のために水平に動けないのである。

円筒を構成する粒子とその周辺の流体粒子は、(9) や (11) に従って応力が計算され、運動方程式 (6) に従って位置を変えていく。この計算で、カーネル平均は粒子間隔の 2.5 倍以内の範囲に存在する粒子にわたってとられた。容器を構成する固定粒子は、運動方程式を無視して強制的に位置を固定されるが、その近傍に存在する流体粒子の状態や運動を計算するには、固定粒子も応力の値をもつ必要がある。そこで、近傍の流体粒子と同じ粘性を用いて、(9) から応力が計算される。カーネル平均の計算の便宜のために、容器は 2 列の固定粒子で構成される。この計算で採用した数値計算の時間 t の刻みは 2×10^{-4} s で、 $t = 0$ から 20 s まで計算して、演算に要した時間は 32 cpu を用いた並列処理で約 30 分であった。

計算結果として、円筒が固体粒子で構成される場合を図 4 に、流体粒子で構成される場合を図 5 に示す。どちらも初期状態から 10 s が経過したときの粒子の状態である。図の左は粒子の位置と速度である。粒子の位置は円で示され、円の大きさの変化で初期状態からの密度変化を表すが、これらの場合には図から読み取れるほどの密度差は生じない。各粒子の速度は、円の中心から引かれた線分の長さと方向で表現する。右側の図は応力(表面に加えた圧力の寄与を差し引いたもの)の分布である。 $x-y$ 平面内で応力成分を主軸の方向に分解し、主軸の方向と主値の大きさ(薄い線は張力、

濃い線は圧縮力)を示す。空間スケール、速度と応力の大きさは、各々の図の真上に書かれた線分の長さで示される。

円筒が固体粒子で構成される場合(図 4)には、円筒を構成する粒子は基本的には元の形を保って上昇する。これは期待通りの結果であるが、よく注意して見ると、粒子の配列は初期状態と同じではなく、細密充填になるように相互の位置をずらしている。同様な粒子配列の変化は、周辺の流体粒子にも広く見られる。この点から見ると、粒子の初期配列にも細密充填を満たすような配慮が望ましそうである。周辺の流体の流れは、全体としては円筒の上昇を埋め合わせるように分布する。すなわち、円筒に引きずられて上昇し、両側で下降する流れの傾向が読み取れる。しかし、個々の粒子の運動は全体の傾向と必ずしも整合的とはいえない、乱流的な様相がかなり見られる。ちなみに、この系のレイノルズ数は 300 程度である。応力の分布については、大きな差応力(応力の非静水圧成分)が円筒の内部にある固体粒子に集中するのが見られる。

流体粒子で構成される円筒(図 5)は、帽子のように上側に膨らんで上昇する。初期の円筒の形状は大きく変形し、各粒子はばらばらになりかかっている。ここでも、流れが乱流傾向にあることが読み取れる。同じ経過時間で比べた円筒の位置は、固体粒子の場合より多少上にきており、全体としての上昇速度が大き目であることが示される。応力の分布には、固体粒子の場合のような円筒への差応力の集中は見られない。

最初円筒の中心にあった粒子が、高さ y 、上昇速度 v_y 、密度 ρ 、圧力 p を時間 t とともにどう変えたかを図 6 に示す。3 本の曲線の内、s は円筒が固体粒子で構成される場合、f は流体粒子で構成される場合で、これらは図 4 と図 5 に示された計算事例に対応する。g とラベルがつけられた点線は、円筒が揮発成分を含む流体粒子で構成される場合で、それについて次節で述べる。上昇速

度の変化を見ると、円筒が固体粒子で構成される場合は、上昇は加速を続けており、定常状態に達する前に液面に達してしまう。どの計算事例にも、

速度や圧力に細かい振動が見られ、個々の粒子の状態は必ずしもスムースに変化していない。

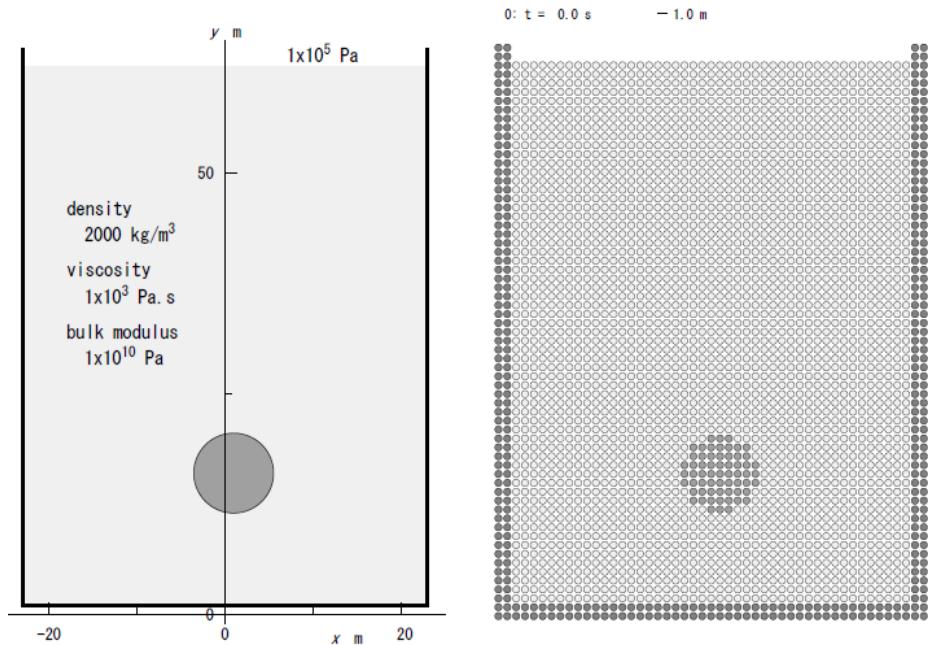


図 2 2 次元の容器内に置かれた円筒の浮力による上昇。 $t = 0$ における初期状態(左)とその粒子法による表現(右)。容器の壁は 2 列の固定粒子で表現する。円筒は初期密度が周囲の流体の半分に設定され、弾性体(図 4)、流体(図 5)、揮発性成分を含む流体(図 7、図 8)の場合を考える。

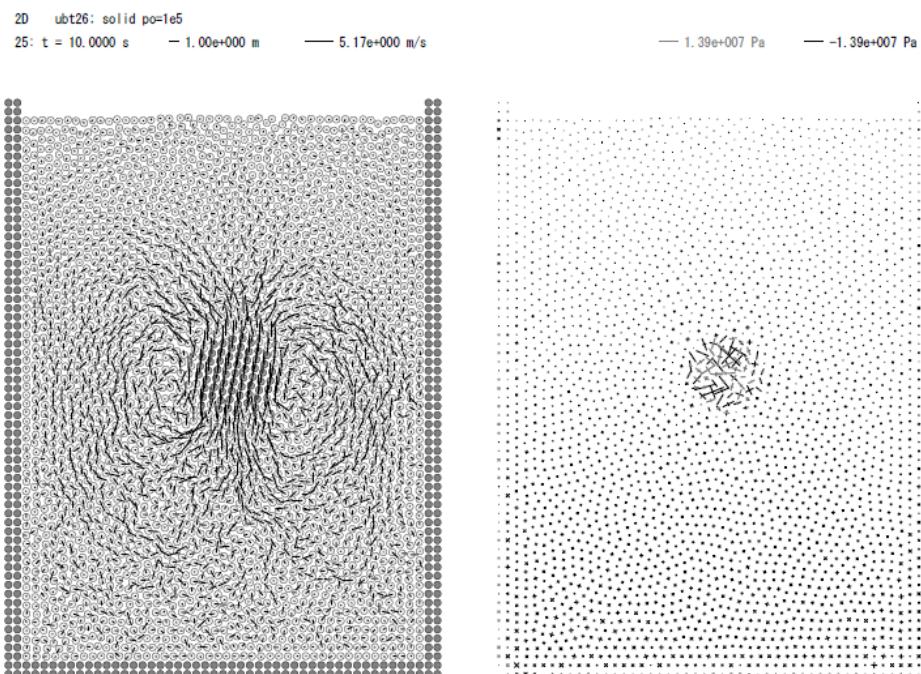


図 3 円筒が固体の場合の $t = 10\text{ s}$ における粒子の位置と速度(左)および応力(右)の分布。円筒の初期密度は周囲の流体の半分、体積弾性率は周囲の流体と同じ、ポアソン比は 0.25 に設定した。

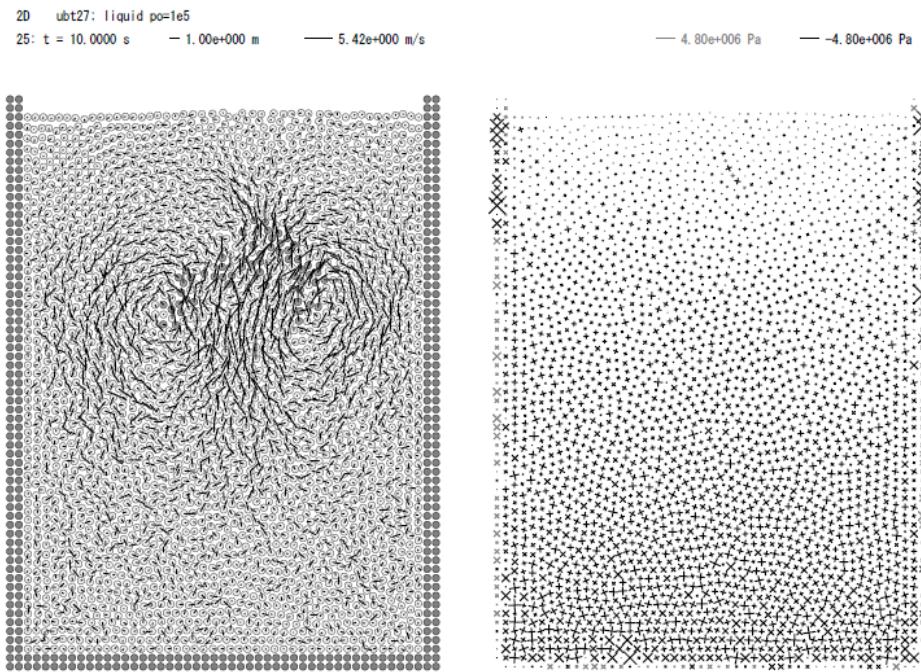


図 4 円筒が流体の場合の $t=10\text{s}$ における粒子の位置と速度（左）および応力（右）。円筒の初期密度は周囲の流体の半分、粘性率と体積弾性率は周囲の流体と同じに設定した。

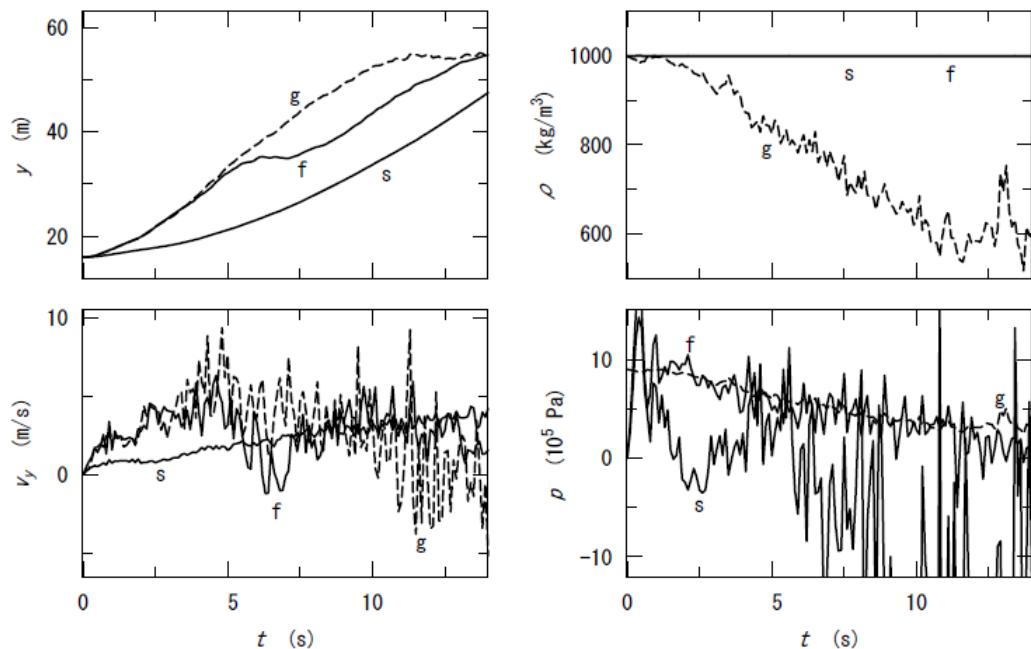


図 5 $t=0$ で円盤の中心にあった粒子の鉛直座標 y 、上昇速度 v_y 、密度 ρ 、圧力 p の時間変化。実線 s と f は円筒が固体（図 4）と液体（図 5）の場合であり、点線 g は円筒が揮発性成分を含む流体の場合（図 6、図 7）である。

4. SPH 法の火山学への応用

4.1. マグマ中のガス成分の扱い

SPH 法では、連続体の任意の性質は粒子の性質としてそのまま解析に組み込むことができる。その適用例として、以下にマグマ中のガス成分の扱いについて述べる。

マグマには H_2O や CO_2 などの揮発性成分が質量にして 1% 前後溶解する。マグマが上昇して圧力が下がると、揮発性成分は気相となって析出し、マグマ中に気泡をつくる。マグマは気泡流となり、2 相流としての性質をもつ。気相は液相より圧縮性がずっと高いので、マグマの上昇とともに気相は著しく膨張して、マグマ全体の密度を大きく下げる。そのために、マグマの上昇は加速する。気泡の体積がマグマ全体の体積の大半を占めたり、気泡の膨張が大きな歪を発生させたりすると、マグマの液体部分は破壊されて気泡流の枠組みが壊され、気相の間にマグマの破片が浮く状態になる。すなわち、マグマは気泡流から噴霧流に転移する。この転移を破碎と呼ぶ。

破碎が起こるかどうかは、マグマが浅部までガス成分を十分に保持できるかどうかにかかっている[7],[8]。多量のガス成分が逃げ出し、マグマが気泡流の状態で出るのが溶岩流である。十分な量のガス成分が保持され、マグマが破碎されて噴霧流として噴出すると爆発的な噴火になる。その場合には、噴霧流は大気中で噴煙や火碎流になって、火山灰、軽石、スコリアなどの形で地面に堆積する。このように、噴火の形態を含めた数値シミュレーションには、揮発性成分の効果を取り入れることが不可欠である。

4.2. ガス成分を含むマグマの状態方程式

マグマの中で揮発性成分が発泡して気泡ができると、マグマ全体の密度は顕著な影響を受ける。気泡を含むマグマの密度 ρ は、その体積の合計がマグマ全体に占める割合（気相の体積分率、マグマの空隙率やボイド率）を ψ として、以下のように

表される。

$$\rho = (1 - \psi)\rho_l + \psi\rho_g \quad (12)$$

ここで ρ_l は液相マグマの密度、 ρ_g は気相の密度である。圧力 p がマグマ中で一様だとして、それらを次式で近似する。

$$\begin{aligned} \rho_l &= \rho_o(1 + \frac{p}{K_l}) \\ \rho_g &= \frac{p}{RT} \end{aligned} \quad (13)$$

液相については、圧力がゼロのときに密度 ρ_o と体積弾性率 K_l を使って、状態方程式を 1 次式で近似した。気相については理想気体の状態方程式を仮定した。 R はガス定数を分子量で割ったもの、 T は絶対温度である。

揮発性成分にはマグマに溶解する部分と気相になって気泡を構成する部分がある。この 2 つの割合が熱力学的な平衡条件で決まるときすれば、液体マグマに溶解できるのは溶解度以内の分だけである。 m を揮発性成分の総質量と液体マグマの質量の比、 m_d を溶解度（液体マグマの単位質量に溶解可能な揮発性成分の質量）とすれば、 $m < m_d$ のときは、揮発性成分の全てが溶解して $\psi = 0$ となる。 $m > m_d$ のときは、溶解した残りが気泡になって

$$\psi = \frac{\xi\rho}{\rho_g} \quad \xi = \frac{m - m_d}{1 + m} \quad m_d = \left(\frac{p}{p_s}\right)^\gamma \quad (14)$$

(14)の第 3 式は、溶解度と圧力の関係、すなわちヘンリーの法則で、 p_s と γ は定数である。

(14)の第 1 式と(12)を組み合わせると、密度を記述する次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\rho_l}{1 + \xi(\rho_l / \rho_g - 1)} \quad (m > m_d); \\ \rho &= \rho_l \quad (m < m_d) \end{aligned} \quad (15)$$

(15)式を (13)式、(14)式と組み合わせることで、マグマの密度を圧力の関数として計算することができる。SPH 法では、カーネル平均によって、まず ρ が得られるので、この関係を逆に解いて、 ρ に対応する p を計算する必要があるが、その処理は数値的に行う。

図 7 は、図 3 に示した状況設定で、容器内の円筒が揮発性成分を含むマグマの状態方程式を満たす場合である。上昇開始からの時間は、揮発性成分を含まない図 5 と同じ 10s である。円筒を構成する部分は明らかに周囲よりも膨張している。この膨張のために浮力も大きくなり、位置も揮発性成分を含まない場合よりも上部に達している。

$t=0$ で円筒の中心にあった粒子が、時間とともに位置、速度、密度、圧力をどう変えるかを、揮発性成分を含まない場合と比較して図 6 に示す。上昇開始後間もなく密度が下がり始め、気泡の生成が始まったことが読み取れる。

4.3. 気泡流の破碎の扱い

噴火の形態についての数値シミュレーションをするためには、マグマが破碎されて気泡流から噴霧流に転移する過程を扱う必要がある。破碎条件としては、マグマがガラス化して脆性破壊を起こす機構や、大きな変形のためにマグマが引きちぎられる機構などが提案されているが、数値シミュレーションで最も扱い易いのは、気相の体積分率 ψ がしきい値 ψ_f を超えたときに破碎が起こるとする条件である。マグマ上昇過程の数値シミュレーションでは、この破碎条件が使われることが多いので、ここでもそれを採用することにする。火山の周辺で採取される火山噴出物の分析から、 ψ_f は 0.7 ~ 0.8 程度の値を取ると見積もられる。

SPH 法では、連続体の性質は粒子の性質とみなせるので、破碎についても粒子の単位で対応するのが簡単である。すなわち、4.2 節で述べたように液体粒子に気相の体積分率 ψ の値を変数としてもたせ、それが ψ_f を超えたときにその粒子は破碎されたとみなすのである。破碎された粒子は、噴霧流を表現する別な粒子グループに所属されることで、破碎への対応は完結する。噴霧流を表わすグループは、気泡流より小さな粘性率をもつようにならなければよいだろう。計算プログラム上では、control 関数（図 2）で入力ファイルを読み込

んで計算の準備をするときに、破碎時に移行する粒子グループを作ておく。粒子の運動や状態変化を計算する各時間ステップでは、破碎条件が満たされたかどうかを判定し、満たされた場合にはグループの移行を実行する。その処理は fract 関数に書き込まれる。

計算例を図 8 にあげる。これは図 7 で取り上げた計算の延長上で得られた結果である。図 7 の状態より発泡が更に進んでおり、体積分率が ψ_f をこえた粒子が現れたので、その粒子は色を濃くしてある。ここでは計算の便宜のために破碎を多少起こり易くして、 $\psi_f = 0.5$ とした。

4.4. マグマに対するその他の対処

マグマが関係する現象を扱う際には、この他にも様々な問題にぶつかる。問題の詳細や対応事例は省略して、SPH 法の特徴をどう活かすかを考える上で参考になりそうな内容を以下に述べる。

まず、ガス成分の移動の問題を考える。マグマに溶解する揮発性成分は液体中を拡散で移動し、その拡散によって気泡の成長速度が制御される。気化して気相になったガス成分は、浸透流としてマグマ中を移動する。大量のガス成分が浸透流によって移動して、マグマの外へ逃げ出すと、マグマは破碎を起こせなくなり、地表には気泡流のまま溶岩として流出する。溶岩の流出と爆発的な噴火のどちらが起こるかは、上昇過程で浸透流によるガス抜きがどこまで進行するかにかかっている。

浸透流によるガス成分の移動は、ガス成分の量 m に対する次の微分方程式によって決められる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m}{1+m} \rho \right) = \frac{\rho_g \kappa}{\eta_g} \sum_i \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} \quad (16)$$

ここで、 κ は浸透率、 η_g はガスの粘性率である。SPH 法では、運動方程式などのと同様な方法で、この方程式にも対処できる。すなわち、 m の変化を粒子間でのガス成分のやり取りの形で記述するのである。同様な方法で拡散や熱伝導なども扱うことができる。

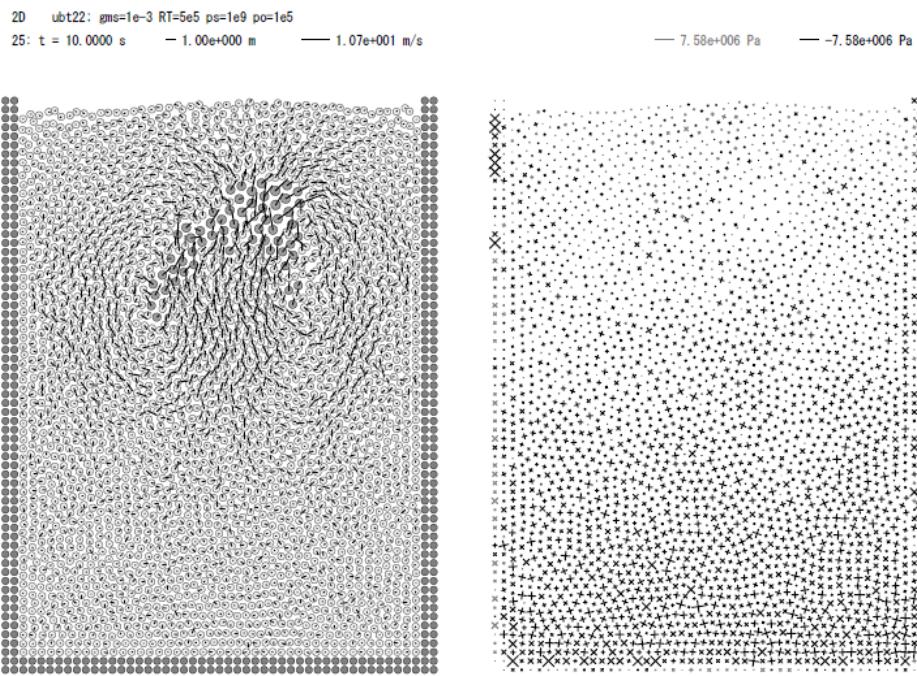


図 6 円筒が揮発性成分を含む流体であるとした場合の計算例。 $t = 10\text{s}$ における粒子の位置と速度（左）および応力（右）を示す。揮発性成分の発泡と気相の膨張によって、円筒の密度は上昇とともに著しく下がる。揮発性成分の量は $m = 0.001$ 、状態方程式は $RT = 5 \times 10^5 \text{ m}^2/\text{s}^2$ 、溶解度は $\gamma = 1$ で $p_s = 1 \times 10^9 \text{ Pa}$ とした。液面には 10^5 Pa の圧力を加えてある。

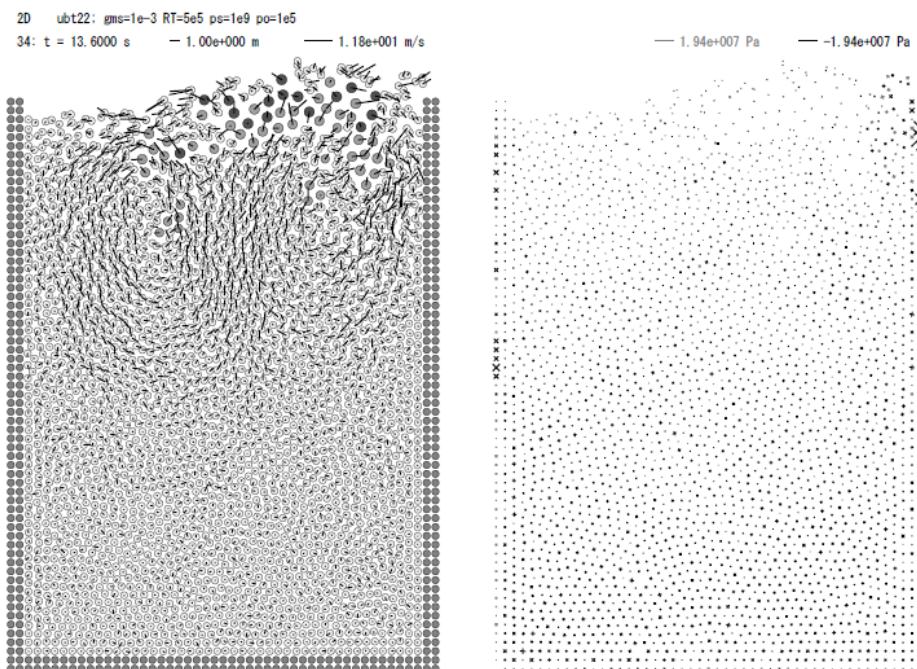


図 7 円筒が揮発性成分を含む液体であるとした場合（図 7）の $t = 13.6\text{s}$ における粒子の位置と速度（左）および応力（右）。円筒を構成する粒子の一部が破碎条件（気相の体積分率が 0.5 以上）を満たして、気泡流粒子から噴霧流粒子（色の濃い粒子）に転移している。

次に、マグマが岩石に貫入する過程を考えてみよう。水圧破壊と同様な機構で、マグマは岩石中に割れ目をつくって移動し、地表に噴出して割れ目噴火を起こす。割れ目に侵入したマグマは、応力の集中によって岩石の先端を破壊し、割れ目をさらに進展させて、岩石中を移動するわけである。SPH 法では、応力による岩石の破壊は個々の粒子の性質とみなせるので、破碎の扱いと同様に、この現象にも対処できる。液体マグマとの相互作用で、固体粒子の差応力が連続体の破壊条件（例えばモール・クーリンの条件）を満たしたときに、固体粒子は破壊され、別なグループ、例えば適当な粘性率をもつ流体粒子に転換されるのである。対応する固体粒子の変質によって、岩石はマグマの侵入を許すようになるのである。

破碎や破壊に対応するこのような扱いは、連続体力学と同じ基準を用いて対処できる点で SPH 法の利点をうまく生かしている。破碎や破碎が粒子を単位としてしか扱えない欠点があるが、その誤差は粒子を十分に細かくすることによって回避できるだろう。

5.まとめ

SPH 法では、連続体に対して成立する各種の偏微分方程式は、粒子間の相互作用を記述する関係式にそのまま変換できる。この変換の一環として、連続体の運動方程式や構成方程式から粒子の運動や状態変化を決める関係式が得られ、それが SPH 法で物質の変形や流動を計算する枠組みとなっている。偏微分方程式を粒子間の関係式に置き換える方法は、拡散、熱伝導、破壊、構成成分の移動などにも広く適用できるので、各種の物理化学過程は変形や流動と一緒に容易に解析できる。本稿では火山学的な応用例として、揮発性成分の発泡や膨張、破碎による気泡流から噴霧流への転移、マグマの上昇が引き起こす水圧破壊などのとり扱い方を述べた。

複数の物質が複雑に入り組む現象の解析に SPH 法が強みを発揮することは、ここでは 2 種類の物体が浮力によって入れ替わる現象を例に示した。粒子間相互作用と連続体の偏微分方程式の密接な対応関係も含めて、SPH 法は様々な問題に高い適応能力をもつことが分かる。しかし、実際に SPH 法を使って見ると、以下のような問題点も実感される。

図 6 では、個々の粒子の運動や状態変化にかなり大きな揺らぎが見られる。特に速度や圧力の揺らぎが顕著である。この揺らぎは連続体の性質を反映する現実の変動ではなく、粒子法特有の人工的な振動であると思われる。原子のブラウン運動と同様に、粒子が音速で情報を交換しながら相互の位置を手探りで決めていく過程で発生するものと思われる。連続体の各部分には隣接部から強い拘束力が加わるが、それが粒子間力に置き換えられたときに、拘束の一部が解き放たれ、粒子に過剰な自由度が付与される。人工的な揺れがそれを反映するものだろう。

このような粒子の状態の揺らぎは当然計算誤差の原因となる。特に、破碎や破壊など、粒子がその性質を変えて別なグループに転移する場合には、判定に大きな影響を及ぼす可能性がある。著者の経験では、この揺らぎは運動方程式に人工粘性の項を考慮することでかなり抑制できる。また、粒子の状態の時間平均や、周囲の粒子との間の空間平均をとることも揺らぎを抑える上で有効である。

6. 謝辞

本稿の内容は防災科学研究所の藤田英輔博士との共同研究の一部である。計算プログラムの開発にあたっては、筑波大学の松島亘志准教授に全般的なご指導を、また並列化について日本 SGI 株式会社の西沢直樹氏にご助力いただいた。ここに記して感謝の意を表したい。

参考文献

- [1] R. A. Gingold and J. J. Monaghan:
"Smoothed particle hydrodynamics: theory
and application to non-spherical stars",
Monthly Notices Royal Astronom. Soc.,
181(1977) p. 375-389.
- [2] G. R. Liu and M. B. Liu: "Smoothed
Particle Hydrodynamics: A Meshfree
Particle Method", World Scientific
Publishing Co., Singapore (2003) p. 1-449.
- [3] 腰塚誠一: "粒子法". 丸善 (2005) p. 1-144.
- [4] Ha H. Bui, K. Sako and R. Fukagawa:
"Numerical simulation of soil water
interaction using smoothed particle
hydrodynamics (SPH) method", J.
Terramechanics, 44 (2007) p. 339-346.
- [5] S. Seo, O. Min, J. Lee: "Application of an
improved contact algorithm for penetration
analysis in SPH", Internat. J. Impact
Engineering, 35 (2008) p. 578-588.
- [6] 高見顕郎、河村哲也: "偏微分方程式の差分
解放". 東大出版会 (2001) p. 1-228.
- [7] Y. Ida: "Driving force of lateral permeable
gas flow in magma and the criterion of
explosive and effusive eruptions", J.
Volcanol. Geotherm. Res., 162 (2007) p.
172-184.
- [8] Y. Ida: "Computer simulation of
time-dependent magma ascent processes
involving bubbly and gassy flows", J.
Volcanol. Geotherm. Res., 196 (2010) p.
45-56.

