

Advance/FrontSTR Ver. 3.0の非線形解析機能について

袁 熙*

Theory reference on nonlinear analysis of Advance/FrontSTR Ver. 3.0

Xi YUAN*

1. はじめに

Advance/FrontSTR は、先進性と実用性を兼ね備えた汎用構造解析ソフトウェアとして、進化を続けている。本ソフトウェア Advance/FrontSTR は、大規模並列計算汎用有限要素法構造解析プログラムであり、固体の静的変形解析、固有値解析、熱伝導解析および線形動解析に関する 3 次元解析が可能である。

文部科学省の次世代 IT 基盤構築のための研究開発「イノベーション基盤シミュレーションソフトウェアの研究開発」プロジェクトで、アドバンスソフト株式会社は「構造解析ソフトウェア FrontISTR における材料・幾何学的非線形機能の作成」等の業務を担当し、従来の成果に幾何非線形・材料非線形・接触非線形解析機能を開発した。アドバンスソフト株式会社では、これらのソフトウェアを実用化するために独自に改良を進め、商用パッケージソフトウェア Advance/FrontSTR3.0 として販売保守を行っている。

Advance/FrontSTR の特長は、第一に、PC・PC クラスタ・スパコンに対応するスケーラビリティである。Advance/FrontSTR は、デスクトップ PC から PC クラスタ、さらにはスパコンとさまざまなアーキテクチャの計算機上で動作する。したがって、利用環境や解析規模・解析頻度に依存せず、同一のソフトウェアを使用することが可能である。第二の特長として、大規模並列計算における優れた並列性能がある。Advance/FrontSTR は、並列計算を想定した設計であるため、従来ソフトウェアに比べて非常に高い並列化効率を実現している。第

3 の特長は、実用的な非線形解析機能である。従来から実績のある線形静解析、線形動解析、固有値解析、熱伝導解析等に加え、実用的な非線形解析機能を継続的に開発している。最新バージョンである Advance/FrontSTR Ver.3.0 では、代表的な材料・幾何学的非線形解析機能と接触解析機能をサポートしている。最後の特長は、他のソフトウェアとの連成解析である。Advance/FrontSTR においては、流体・音響解析等のソフトウェアと連成させた解析が可能である。表 1 に、Advance/FrontSTR Ver.3.0 の解析機能一覧を示す。

表 1 Advance/FrontSTR Ver.3.0 解析機能一覧

項目	内容
線形静解析	熱応力解析を含む
材料非線形	超弾性 / 弾塑性 等方 / 移動 / 複合硬化
幾何学的 非線形	Total Lagrange 法 / Updated Lagrange 法
境界非線形 (接触)	Augmented Lagrange 法、 有限すべり、摩擦
線形動解析	陽解法 / 陰解法
固有値解析	ランチョス法、 モード合成法 (オプション)
熱伝導解析	定常 / 非定常 (陰解法)
要素タイプ	4 面体 / 6 面体 / 5 面体 / シェル
解析支援	境界条件ステップ制御、リスタート、ユーザーサブルーティン

Advance/FrontSTR の解析機能の計算手法は、幾何学的 / 材料非線形 / 境界非線形静解析においては Total Lagrange 法および Updated Lagrange を、

*アドバンスソフト株式会社 技術第 5 部

5th Technical Division in AdvanceSoft Corporation

固有値解析にはランチョス法を、線形動解析の過渡応答問題には直接積分法を採用している。また、非線形問題では、ニュートン・ラブソン法による繰り返し計算手法を用いている。本論文では、Advance/FrontSTR 非線形解析に関わる基礎理論を紹介する。その目的は以下である。

- ・Advance/FrontSTR が対象範囲とする解析手法に関する理論について解説し、理論的裏付けとして提供する。

- ・ユーザーが現象解析に Advance/FrontSTR を適用する際のモデル定義、解析結果の分析などにおける、理論的参考として提供する。

ただし、現時点では Advance/FrontSTR3.0 の非線形解析機能は固体の静的変形解析しか対応していないため、本論文は固体の静的変形解析を論じるものである。

2. 基礎理論

2.1. はじめに

有限要素法の基礎的理論としては、いわゆる連続体の力学によって定式化がされている。連続体の力学では、物体の変形状態を記述するために、物質点という概念を導入し、固体の状態を数学的なモデルで構成する。物質の任意の点の挙動については、連続体の点の位置（数学モデルなので、固体中のすべて点が3次元空間で定義された座標の座標値で表現できることになる）の変化を数学的な方法を用いて記述する。

上記に述べたように固体の状態は数学的なモデルに置き換えて、その変形を記述する。本章では、主にテンソル解析方法を用いて Advance/FrontSTR による有限要素法解析の基礎理論を記述する。以下では、複数の成分を持つ変数（ベクトルとテンソル等）を太字で、スカラー量を標準字体で表す。

なお、テンソル解析においてはお互い双対の関係にある“共変基底と共変テンソル”および“反変基底と反変テンソル”などを区別する必要があるが、物質の変形前と変形後において、空間に固定された直角座標を共通に用いる場合は、双方とも共通とな

り区別する必要がなくなることから、両者を区別しない記述（ベクトルおよびテンソルの基底に対応した成分の右下添え字による表現）とする。ただし、第6章の接触解析に関しては、非直交な接ベクトル空間で問題記述を行うため、その区別を深く注意する必要がある。

2.2. 連続体力学の基礎

2.2.1. 運動力学

連続体力学では、固体や流体に対してその特徴と応答が空間的な変数で示される滑らかな関数でモデリングされることを念頭においている。

時刻 $t=0$ の初期状態にある物体を考える。このとき、初期状態での物体の領域を Ω_0 で示し、初期配置と呼ぶこととする。また、その物体に対するモーションや変形を表れたとき、その状態は参照配置と呼ばれ、さまざまな方程式によって表現される。また、現配置での物体の領域は Ω で定義し、この領域の境界は Γ で定義する。解析対象モデルの次元数は n_{SD} で定義する。ここで、「SD」は空間の次数である。

(1) 変形と配置

参照配置における物質点の位置ベクトルは

$$\mathbf{X} = X_i \mathbf{e}_i \equiv \sum_{i=1}^{n_{SD}} X_i \mathbf{e}_i \quad (2.2.1)$$

で与えられる。ここで、 X_i は、参照配置における位置ベクトルの成分であり、 \mathbf{e}_i は Cartesian 座標系の単位基底ベクトルである。

一方、現配置における座標位置は、

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i \equiv \sum_{i=1}^{n_{SD}} x_i \mathbf{e}_i \quad (2.2.2)$$

で与えられる。ここで、 x_i は現配置における位置ベクトルの成分である。

物体のモーションは、

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t) \quad (2.2.3)$$

で定義される。ここで、 \mathbf{x} は時刻 t における物質点 \mathbf{X} の位置ベクトルである。この関数 $\phi(\mathbf{X}, t)$ は参照配

置から時刻 t の現配置へマッピングされてものとして考える。このとき、参照配置が初期配置と一致するならば、時刻 $t=0$ での任意点における位置ベクトル \mathbf{x} は物質座標系に一致する。つまり、

$$\mathbf{X} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, 0) \equiv \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, 0) \quad (2.2.4)$$

となる。

連続体の変形とその応答に関する表記方法は 2 通りある。1 つ目は、式(2.2.3)のように物質座標系 \mathbf{X}_i と時刻 t を独立な変数として扱う表記方法である。この表記法は物質表記もしくは Lagrangian 表記と呼ばれる。2 つ目は、空間座標系 \mathbf{x}_i と時刻 t を独立な変数として扱う表記方法である。この表記法は空間表記もしくは Eulerian 表記と呼ばれる。

本書で用いる表記方法では、空間表記するものを $f(\mathbf{x}, t)$ とし、物質表記するものを $F(\mathbf{X}, t)$ で表すこととする。このとき、この 2 つの関係は

$$F(\mathbf{X}, t) = f(\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t), t) \quad (2.2.5)$$

で関連づけられるものとする。

(2) 変位・速度・加速度ベクトル

変位ベクトル $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ は物質点に対して現位置と参照位置との差によって表される。

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) - \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, 0) \quad (2.2.6)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) - \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, 0)$$

ここで、 $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = u_i \mathbf{e}_i$ であり、式(2.2.4)で示したモーションを用いて変位ベクトルを

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.2.7)$$

と表記することもある。

速度ベクトル $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ は物質点に対する位置ベクトルの変化率を表している。つまり、 \mathbf{X} に対する物質時間微分 (material time derivative) は一定に保たれ、次のように定義される。

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \equiv \dot{\mathbf{u}} \quad (2.2.8)$$

この式(2.2.8)の第 3 項では、モーションが変位ベク

トル \mathbf{u} に置き換えられている。また、 \mathbf{u} の上に付いているドットは物質時間微分を意味している。

加速度ベクトル $\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$ は物質点に対(する速度ベクトルの変化率を表しており、速度の物質時間微分でもある。このとき、加速度ベクトルは、

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} \equiv \dot{\mathbf{v}} \quad (2.2.9)$$

と定義される。

速度ベクトルが空間座標系や時刻 t で表されている場合 (つまり、 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$)、この速度の物質時間微分は、チェーンルールを用いて

$$\begin{aligned} \frac{Dv_i(\mathbf{x}, t)}{Dt} \\ = \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} \frac{\partial \phi_j(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

と表される。このとき、空間座標系で表記された速度ベクトル $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ が、物質座標系と時間の関数であることに注意が必要である。さらに、右辺第 2 項は対流項であり、 $\partial v_i / \partial t$ は空間時間微分と呼ばれる。式(2.2.10)をテンソル表記すると

$$\frac{D\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{v} \quad (2.2.11)$$

となる。

このように、空間配置で表記されている任意の変数 \mathbf{x} や時刻 t における変数の物質時間微分は、チェーンルールを用いて表される。

(3) 変形勾配テンソル

有限変形解析の大きな特徴の 1 つに変形勾配テンソル \mathbf{F} を考慮することが挙げられる。これは変形前後の物理量に関連づけるものですべての式に含まれるものである。変形勾配テンソルは変形前の初期 (物質) 配置と変形後の現 (空間) 配置に関連づけるものであり、変形やひずみを表現するために用

いられる。

変形勾配テンソル \mathbf{F} の定義は

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \mathbf{X}} \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \equiv \nabla_0 \otimes \boldsymbol{\phi} \quad (2.2.12)$$

とする。このとき、現配置での位置ベクトル \mathbf{x} と物質配置での位置ベクトル \mathbf{X} は変形勾配 \mathbf{F} を用いて

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.2.13)$$

として表すことができる。

(4) ひずみ

一般的ひずみは2つの要素ベクトル $d\mathbf{X}_1$ と $d\mathbf{X}_2$ を $d\mathbf{x}_1$ と $d\mathbf{x}_2$ に変形するようなスカラー積の変化を表す。このとき、空間配置のスカラー積 $ds^2 = d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2$ は、初期配置のスカラー積 $dS^2 = d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2$ に関するものであり

$$d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 = d\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}_2 \quad (2.2.14)$$

という関係がある。ここで、 \mathbf{C} は右 Cauchy-Green 変形テンソルであり、変形勾配に対して

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (2.2.15)$$

という関係で与えられる。また、スカラー積の変化は初期配置における位置ベクトルに関して

$$ds^2 - dS^2 = 2 d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{X} \quad (2.2.16)$$

と関連づけられる。このとき、Green-Lagrange ひずみ \mathbf{E} が定義される

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.2.17)$$

Green-Lagrange ひずみは変位勾配に関する項を用いて次のようにも表される。

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (2.2.18)$$

また、初期配置におけるスカラー積 $d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2$ は、空間配置におけるスカラー積 $d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2$ に関して、左 Cauchy-Green 変形テンソル \mathbf{b} として表される。

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.2.19)$$

同様にスカラー積の変化は

$$ds^2 - dS^2 = 2 d\mathbf{x} \cdot \mathbf{e} d\mathbf{x} \quad (2.2.20)$$

で表される。このとき、Almansi (Eulerian) ひずみ \mathbf{e} は

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T) \quad (2.2.21)$$

と定義される。

(5) 速度勾配・変形勾配

現配置における速度を定義する。速度は式(2.2.8)で示すように空間座標での関数として表されている。このとき速度勾配テンソル \mathbf{l} は次式のように定義される。

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{v} \otimes \nabla \quad (2.2.22)$$

$$d\mathbf{v} = \mathbf{l} d\mathbf{x} \quad (2.2.23)$$

この定義については、空間座標系での表記されることは明白である。そして、現配置における微小要素の点に関する相対速度の意味を持つ。

また、速度勾配テンソルは、次式のように対称部分と反対称部分と分けられる。

$$\mathbf{l} = \frac{1}{2} (\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{l} - \mathbf{l}^T) \quad (2.2.24)$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{v} \otimes \nabla = \mathbf{d} + \mathbf{w} \quad (2.2.25)$$

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) \quad (2.2.26)$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} (\mathbf{l} - \mathbf{l}^T) \quad (2.2.27)$$

このとき、変形速度テンソル \mathbf{d} は \mathbf{l} の対称部分であり、スピンテンソル \mathbf{w} は \mathbf{l} の反対称部分である。

さらに、変形速度テンソルの定義式からチェーンルールを用いて物質配置での勾配を与えると

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.2.28)$$

となる。ここで、変形勾配の定義より $F_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$ であることから、変形勾配の物質時間微分は、

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.2.29)$$

さらに、 $\partial x_i / \partial x_j = \delta_{ij}$ であることから、最終的に変形勾配テンソル \mathbf{l} は

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.2.30)$$

と書き直すことができる。さらに、式(2.2.25)と式(2.2.30)の 2 つのひずみの関係は、

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T) \quad (2.2.31)$$

と表すこともできる。Green-Lagrange ひずみにおける時間微分 $\dot{\mathbf{E}}$ は、材料ひずみ速度テンソルと呼ばれ、

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F}) \quad (2.2.32)$$

となる。

初期配置で表される材料ひずみ速度テンソル $\dot{\mathbf{E}}$ は、現配置でも表記することができ

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{dx}_1 \cdot \mathbf{dx}_2) = \mathbf{dx}_1 \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \mathbf{dx}_2 \quad (2.2.33)$$

となる。

2.2.2. 応力

(1) 各種応力の定義

非線形問題においてさまざまな応力が定義されている。ここでは、3 つの応力について定義することとする。

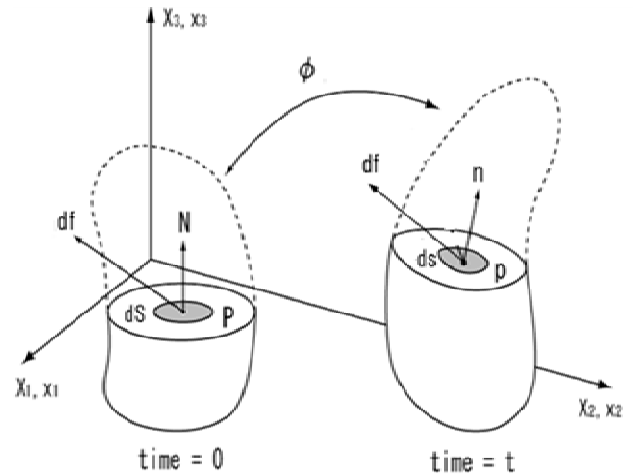


図 2.2.1 応力の変換の概念図

Cauchy 応力は Cauchy 則で定義される。

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = d\mathbf{f}/ds \quad (2.2.34)$$

公称応力 \mathbf{P} は

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = d\mathbf{f}/dS \quad (2.2.35)$$

と表せる。第 2 Piola-Kirchhoff 応力 \mathbf{S} は、

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{f}/dS \quad (2.2.36)$$

と定義される。

各種応力の変形関数に対して相互関係があり、表 2.2.1 にてその関係を示す。このような関係式は参照配置の法線と現配置の法線の間を表現する Nanson の関係式を用いて上式(2.2.34)～(2.2.36)のような関係になる。

表 2.2.1 応力の変換式

	Cauchy stress $\boldsymbol{\sigma}$	Nominal stress \mathbf{P}	2 nd Piola-Kirchhoff stress \mathbf{S}
$\boldsymbol{\sigma}$	-	$\mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}$	$\mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$
\mathbf{P}	$\mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}$	-	$\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$
\mathbf{S}	$\mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}$	$\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^{-T}$	-
$\boldsymbol{\tau}$	$\mathbf{J} \boldsymbol{\sigma}$	$\mathbf{F} \cdot \mathbf{P}$	$\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$

$$\mathbf{n} d\Gamma = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{N} d\Gamma_0 \quad (2.2.37)$$

応力を考える上で、初めに Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}$ と公称応力 \mathbf{P} は $d\mathbf{f}$ で表され、

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} d\Gamma = \mathbf{P} \mathbf{N} d\Gamma_0 \quad (2.2.38)$$

となる。ここで、公称応力は第 1 Piola-Kirchhoff 応力と呼ばれることもある。このとき、Nanson の関係式を用いて、

$$\mathbf{J} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F} \mathbf{N}) d\Gamma_0 = \mathbf{P} \mathbf{N} d\Gamma_0 \quad (2.2.39)$$

となり、以下の式が成り立つ。

$$\mathbf{P} = \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.2.40)$$

このとき、上式(2.2.43)から公称応力 \mathbf{P} は非対称なテンソルであることが分かる。また、公称応力 \mathbf{P} は \mathbf{F} をかけることにより第 2 Piola-Kirchhoff 応力 \mathbf{S} に変換される。

$$d\mathbf{f} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{N} \cdot \mathbf{S}) d\Gamma_0 = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{N}) d\Gamma_0 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{N} d\Gamma_0 \quad (2.2.41)$$

この式をインデックス表記すると

$$df_i = F_{ik} (N_j S_{jk}) d\Gamma_0 = F_{ik} S_{kl}^T N_j d\Gamma_0 \quad (2.2.42)$$

さらに、展開すると、

$$d\mathbf{f} = \mathbf{N} \mathbf{P} d\Gamma_0 = \mathbf{P}^T \mathbf{N} d\Gamma_0 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^T \mathbf{N} d\Gamma_0 \quad (2.2.43)$$

以上より、公称応力 (第 1 Piola-Kirchhoff 応力) \mathbf{P} と第 2 Piola-Kirchhoff 応力 \mathbf{S} の関係は

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.2.44)$$

である。また、式(2.2.43)および式(2.2.47)より、Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}$ と第 2 Piola-Kirchhoff 応力 \mathbf{S} との関係式は、

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.2.45)$$

となる。この関係は、初期配置から現配置へ push forward した式を意味している。逆に、pull back した場合は、次式のように表される。

$$\mathbf{S} = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.2.46)$$

上記より、Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}$ と第 2 Piola-Kirchhoff 応力 \mathbf{S} の関係は、変形勾配 \mathbf{F} とヤコビアン (体積変化率) $\mathbf{J} = \det \mathbf{F}$ のみに依存することが分かる。つまり、この変形勾配 \mathbf{F} が既知量であるならば、Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}$ 、公称応力 \mathbf{P} 、第 2 Piola-Kirchhoff 応力 \mathbf{S} のどれかで応力を表すことができる。また、式(2.2.36)からも分かるように Cauchy 応力は対称テンソルであり、同様に第 2 Piola-Kirchhoff 応力も対称テンソルとなる。

(2) 客観性を有する応力速度

観測座標系に依存しないテンソルやその速度を「客観性が有する」という。ここでは、客観性を有する代表的な応力速度である Jaumann 速度、Truesdell 速度、Green-Naghdi 速度について簡単に説明をする。

(a) Jaumann 速度

Cauchy 応力の Jaumann 速度は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} = \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} - \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w}^T \quad (2.2.47)$$

ここで、 \mathbf{w} はスピンテンソルである。右肩の記号「 ∇ 」は客観速度を意味し、「 ∇J 」は Jaumann 速度を指す。

(b) Truesdell 速度, Green-Naghdi 速度

Cauchy 応力の Truesdell 速度は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla T} = \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} + \text{div}(\mathbf{v})\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l}^T \quad (2.2.48)$$

また、Cauchy 応力の Green-Naghdi 速度は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla G} = \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Omega}^T \quad (2.2.49)$$

ここで、 $\boldsymbol{\Omega}$ は主軸系におけるスピンテンソルである。

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \quad (2.2.50)$$

Green-Naghdi 速度は、Jaumann 速度で用いたス

ピンテンソルに対する材料の回転の定義を角速度へ変更したものである。また、Truesdell 速度と Jaumann 速度の関係は、速度勾配 \mathbf{l} を対称テンソル (変形速度テンソル) \mathbf{d} と反対称テンソル (スピテンソル) \mathbf{w} に置き換えることができるため

$$\sigma^{\nabla T} = \frac{D\sigma}{Dt} + \text{div}(\mathbf{v})\sigma - (\mathbf{d} + \mathbf{w}) \cdot \sigma - \sigma \cdot (\mathbf{d} + \mathbf{w})^T \quad (2.2.51)$$

となることから、Truesdell 速度は Jaumann 速度におけるスピテンソルに関する項に加えて、変形速度に依存する項も含まれていると言える。

(c) 第 2Piola-Kirchhoff 応力速度

時刻 t での現配置を基準とする時刻 τ での第 2 Piola-Kirchhoff 応力 $\mathbf{S}_t(\tau)$ の速度 $\partial \mathbf{S}_t(\tau) = \dot{\mathbf{S}}_t(\tau)$ をとる。 $\tau \rightarrow t$ として求める $\dot{\mathbf{S}}_t(t)$ が時刻 t_0 の配置を基準とする第 2Piola-Kirchhoff 応力の速度 $\dot{\mathbf{S}}$ から push forward したものであり、以下に関係がある。

$$\dot{\mathbf{S}}_t(t) = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.2.52)$$

この式を展開すると

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}}_t(t) &= \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} \cdot \left[\frac{d}{dt} (\mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} \cdot \sigma \cdot \mathbf{F}^{-T}) \right] \cdot \mathbf{F}^T = \\ &= \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} \cdot \left(\mathbf{J} \dot{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \sigma \cdot \mathbf{F}^{-T} + \mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} + \mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-T} \right) \cdot \mathbf{F}^T \\ &= \frac{D\sigma}{Dt} + \text{div}(\mathbf{v})\sigma - \mathbf{l} \cdot \sigma - \sigma \cdot \mathbf{l}^T \end{aligned} \quad (2.2.53)$$

となり、式(2.2.48)で示した Cauchy 応力の Truesdell 速度と一致することが分かる。

2.2.3. 保存則

(1) 質量保存の原理

領域 Ω 内における質量 $m(\Omega)$ を以下のように定義する。

$$m(\Omega) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{X}, t) d\Omega \quad (2.2.54)$$

ここで、 $\rho(\mathbf{X}, t)$ は密度である。質量保存の原理とは、任意の物質領域内の質量が時間に依存せずに

$$\dot{m} = 0 \quad (2.2.55)$$

が成立することを意味する。上式(2.2.55)の空間時間導関数から導かれ、

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = 0 \quad (2.2.56)$$

である。変形後の質量 $m(\Omega)$ も一定であるとしている。ここで、密度 $\rho(\mathbf{X}, t)$ は空間配置における密度であり時間に依存することから、基準配置における密度 $\rho_0(\mathbf{X}) = \mathbf{J} \rho(\mathbf{X}, t)$ を用いて時間微分を行うと、

$$\int_{\Omega} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\mathbf{v}) \right) d\Omega = 0 \quad (2.2.57)$$

となる。ここで、 $\mathbf{j}/\mathbf{J} = \text{tr}(\mathbf{l}) = \partial v_i / \partial x_i = \text{div}(\mathbf{v})$ である。これより、任意の物質領域 Ω に対して、

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (2.2.58)$$

となる。この式は連続の式と呼ばれる。

また、基準配置における密度 $\rho_0(\mathbf{X})$ における連続式は、

$$\int_{\Omega} \rho d\Omega = \text{const} = \int_{\Omega} \rho_0 d\Omega_0 \quad (2.2.59)$$

となる。

(2) 運動量保存則・角運動量保存則

物体に作用する力には物体力ベクトル $\rho \mathbf{b}$ と表面力ベクトル \mathbf{t} がある。ただし、 $\rho \mathbf{b}$ は単位体積当たりの力、 \mathbf{t} は単位面積当たりの力である。物体全体におけるこれらの和と運動量 $\int_{\Omega} \rho \mathbf{v} d\Omega$ の速度は次式のように等置される。

$$\left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \, d\Omega \right)' = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \, d\Gamma \quad (2.2.60)$$

上式を変換し、次のように表すことができる。

$$\int_{\Omega} \rho \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \mathbf{b} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{t} \, d\Gamma \quad (2.2.61)$$

この式に式(2.2.34)および発散定理を適応すると

$$\int_{\Omega} \rho \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \mathbf{b} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \quad (2.2.62)$$

となり、これが物体の任意の一部分について成立することから

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (2.2.63)$$

となる。これは Cauchy の第 1 運動法則または平衡方程式と呼ばれる。なお、本論文で静的問題だけ議論しており、左辺はゼロと仮定している。

一方、角運動量保存則は物体力および表面力のモーメントと運動量のモーメントの速度を

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{x} \times \mathbf{t} \, d\Gamma \quad (2.2.64)$$

として関連づけている。この式の右辺第 2 項の \mathbf{t} に式(2.2.34)を代入し、平衡方程式(2.2.63)を用いると

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{ij} = 0 \quad (2.2.65)$$

を得る。上式が成立するためには

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.2.66)$$

すなわち、Cauchy 応力は対称である。

(3) エネルギー保存則

物体に作用する全エネルギーの変化率は、

$$p_{\text{tot}} = p_{\text{int}} + p_{\text{kin}}, \quad p_{\text{int}} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho W^{\text{int}} d\Omega,$$

$$p_{\text{kin}} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} d\Omega$$

(2.2.67)

と表される。ここで、 p_{int} は内部エネルギー変化率、 p_{kin} は運動エネルギー変化率と定義する。また、領域 Ω 内における物体力と表面力の仕事率は、

$$p_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma \quad (2.2.68)$$

と書ける。このとき、熱量 s や熱流束 \mathbf{q} によるエネルギーは、

$$p_{\text{heat}} = \int_{\Omega} \rho s \, d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} \, d\Gamma \quad (2.2.69)$$

となる。ここで、熱流束項の正負は、熱が物体外へ放出される方向を負とする。このとき、エネルギーの保存状態は、

$$p_{\text{tot}} = p_{\text{ext}} + p_{\text{heat}} \quad (2.2.70)$$

と表すことができる。以上のことから、物体に作用する全エネルギー変化率は外力による仕事率と熱流束によって供給される仕事率が等しくなる。これを熱力学の第 1 法則と呼ぶ。

内部エネルギーの損失量は材料に依存する。弾性材料の内部エネルギーは変形中に蓄えられ、除荷過程において解放される。また、弾塑性材料の内部エネルギーは熱等に変換され、材料内部のエネルギーが失われる。このことから、エネルギー保存の状態は、

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \left(\rho W^{\text{int}} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b} \, d\Omega$$

$$+ \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \mathbf{s} \, d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} \, d\Gamma \quad (2.2.71)$$

と表される。上式に対して、Reynold の定理や Gauss の定理を用いて整理すると、

$$\int_{\Omega} \left(\rho \frac{DW^{int}}{Dt} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho \mathbf{s} + \mathbf{v} \cdot \left(\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{b} \right) \right) d\Omega = 0 \quad (2.2.72)$$

となる。そして、運動力保存則(2.2.63)より、式(2.2.72)の積分記号中の最後の項が消える。最終的に、任意の領域において、

$$\rho \frac{DW^{int}}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho \mathbf{s} \quad (2.2.73)$$

が成り立ち、これをエネルギー保存則と呼ぶ。さらに、熱流束と熱量が発生しない場合には、

$$\rho \frac{DW^{int}}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \quad (2.2.74)$$

のみの式で表される。この式は物体の変形エネルギーの変化率は Cauchy 応力と変形速度テンソルの積であることを示している。

2.3. 境界値問題と仮想仕事の原理

静的な物体の運動を考える。物体表面 Γ の各点において単位面積当たりの表面力 $\bar{\mathbf{t}}$ 、あるいは変位 $\bar{\mathbf{u}}$ が、また物体内の各点において単位体積当たり \mathbf{b} の体積力が与えられるものとする。これらの境界条件を含め、物体は平衡状態にあるため次の諸条件を満足しなければならない。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2.3.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (2.3.2)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (2.3.3)$$

ここで、式(2.3.1)は式(2.2.63)で示される運動方程式、 Γ_t は力学的境界、 Γ_u は幾何学的境界である。

式(2.3.1)に変位の変分 $\delta \mathbf{u}$ をかけ、物体の全領域における積分をとると以下の式が得られる。

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{u} \otimes \nabla \, d\Omega = \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \quad (2.3.4)$$

$$\delta \mathbf{u} = 0 \quad \text{on } \Gamma_u \quad (2.3.5)$$

この式は式(2.3.1)~(2.3.3)の弱形式と仮想仕事原理式と呼ばれる。この式の右辺は外力による仮想仕事であり、式(2.2.78)と比べ、式(2.3.4)の左辺は変形エネルギーの仮想変化を表していることが分かる。

式(2.3.4)が現配置で表したものである。この表示法は運用上にしばしば面倒な計算が必要になることがあるため、この式を初期配置まで変換する必要がある。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{u} \otimes \nabla \, d\Omega &= \int_{\Omega} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T : \delta \mathbf{u} \otimes \nabla \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{u} \otimes \nabla \cdot \mathbf{F} \, d\Omega_0 \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

上式右辺の後半は以下のように変換する。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{u} \otimes \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} \right) \right\} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial x_i}{\partial X_i} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\delta_{ki} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right) \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_j} + \left(\delta_{ii} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right) \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_j} \right) \\ &= \delta E_{ij} \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

この式を式(2.3.7)に代入すれば、

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{u} \otimes \nabla d\Omega = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} d\Omega_0 \quad (2.3.8)$$

が得られる。この式は第2 Piola-Kirchhoff 応力 \mathbf{S} が Green-Lagrange ひずみ \mathbf{E} と共役な関係にあることを示している。

式(2.3.6)、(2.3.8)は式(2.3.4)に代入すると、時刻0の初期配置を基準とする時刻 t での仮想仕事式が得られる。

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} d\Omega_0 = \int_{\Gamma_0} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \delta \mathbf{v} d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega_0 \quad (2.3.9)$$

ここで、 $\rho d\Omega = \rho_0 d\Omega_0$ 、 $\mathbf{t} d\Gamma = \bar{\mathbf{t}}_0 d\Gamma_0$ を利用した。

3. 有限要素解析の枠組み

第2章では連続体力学の基礎式を解説し、最終的に仮想仕事に帰着した。本章ではこれを基づき仮想仕事式を増分分解し、さらに空間離散化し本ソフトウェアで用いられる有限要素法における解析手法について説明する。

3.1. 問題設定

有限ひずみ理論に基づく非線形解析では、仮想仕事式や運動方程式を Newton-Raphson 法を用いて陰的に解くことが多い。一般的な非線形有限要素法では、ある小さな荷重増分量に対する変位量を求め、それを積み重ねることで最終的な変形状態へ至る増分解析を行う。

図3.1.1では、現配置の時刻 t_n までは解析済みで既知量として与えられていることを想定し、 Δt 秒後の時刻 t_{n+1} における物体の状態を有限要素法により求めるものとする。このように、時刻 t_{n+1} の未知の状態の仮想仕事式を Lagrange 表記するにあたって、時刻0の初期配置を参照するか、増分を開始する時刻 t_n の配置を参照するのによって数値解法の手法が異なる。前者は total Lagrange 法、後者は updated Lagrange 法と呼ばれる。

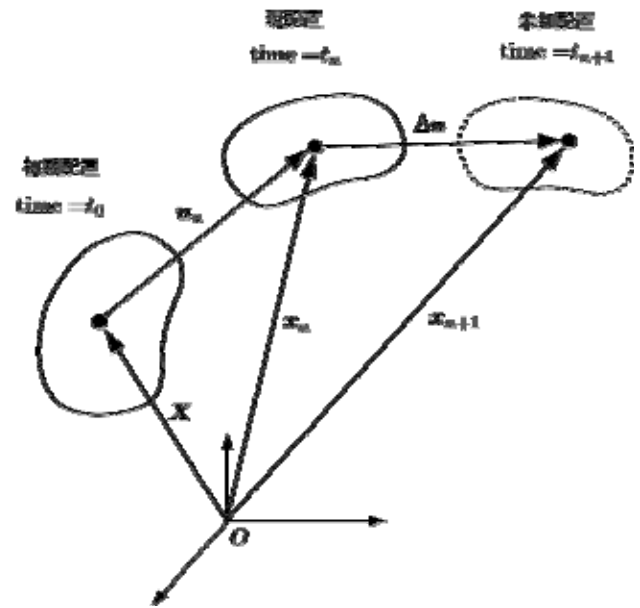


図 3.1.1 配置と物体の運動

以降では、常に解析対象物の時刻と配置を意識しながら定式化を進めていかなければならないため、表記方法について整理を行う。

本理論において一貫して用いられている基本ルールであるが、初期配置に関する変数（例えば、第1・第2 Piola-Kirchhoff 応力 \mathbf{P} や \mathbf{S} 、位置ベクトル \mathbf{X} ）は大文字で表記し、現配置に関する変数（例えば、Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}$ 、位置ベクトル \mathbf{x} ）は小文字で表記している。さらに、本節のような Lagrange 表記においては、時刻に関する表記法を追加しなければならない。

3.2. 仮想仕事式を増分分解

図3.1.1を参照して、時刻 t_n までの状態は既知であり、時刻 t_{n+1} における物体の状態を求めるものとする。このとき、解くべき時刻 t_{n+1} の境界値問題は以下ようになる。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \rho_{n+1} \mathbf{b}_{n+1} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega_{n+1} \quad (3.2.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \cdot \mathbf{n}_{n+1} = \mathbf{t}_{n+1} \quad \text{on } \Gamma_{n+1,t} \quad (3.2.2)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \bar{\mathbf{u}}_{n+1} \quad \text{on } \Gamma_{n+1,u} \quad (3.2.3)$$

式(2.3.4)を参照し、以下の仮想仕事式が導かれる。

$$\int_{\Omega} \sigma_{n+1} : \delta \mathbf{u} \otimes \nabla_{n+1} d\Omega = \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \rho_{n+1} \mathbf{b}_{n+1} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \quad (3.2.4)$$

しかし、時刻 t_{n+1} での配置はこの段階では未知であるため、この式を解けるわけがなく、その参照配置を時刻 t_0 か、あるいは時刻 t_{n+1} かにとり、以下に示すような Total lagrange 法あるいは updated Lagrange 法の定式化が行われる。

3.2.1. 幾何非線形を考慮しないときの定式化

物体の変形(剛体回転、変形量を含む)は十分小さい場合では、初期配置 t_0 、現配置 t_n 、未知配置 t_{n+1} の区別が無視でき、幾何学的には線形問題にみなすことができる。この仮想仕事式は、

$$\int_{\Omega_0} \sigma : \delta \varepsilon d\Omega_0 = \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega_0 \quad (3.2.5)$$

$$\delta \mathbf{u} = 0 \quad \text{on } \Gamma_u \quad (3.2.6)$$

となる。ここでは、便利上に初期配置 t_0 をとる。また、

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \{ \mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u} \} \quad (3.2.7)$$

は微小変形ひずみであり、 σ の対称性から

$\sigma : \delta \mathbf{u} \otimes \nabla = \sigma : \delta \varepsilon$ が分かる。さらに、幾何非線形を考慮しないときの応力 - ひずみ関係式は、

$$\sigma = \mathbf{D} : \varepsilon \quad (3.2.8)$$

で与えられる。ここで、 \mathbf{D} は 4 階の接線係数とする。

仮想仕事式(3.2.5)に対して有限要素離散化を行うと、

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \varepsilon^T \cdot \mathbf{D} \cdot \delta \varepsilon d\Omega^e = \sum_e \int_{\Gamma_t^e} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{t} d\Gamma_t^e + \sum_e \int_{\Omega^e} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{b} d\Omega^e \quad (3.2.9)$$

となる。ここでは、 Ω^e は要素領域と指す。有限要素ごとに要素を構成する節点の変位を用いて変位場を次式のように内挿する。

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m N_i \mathbf{u}_i = \mathbf{N} \cdot \mathbf{U} \quad (3.2.10)$$

このとき、ひずみは式(3.2.7)を用いて次式のように与えられる(第 5 章を参照)。

$$\varepsilon = \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} \quad (3.2.11)$$

式(3.2.10)、式(3.2.11)を式(3.2.9)に代入すると、

$$\begin{aligned} \sum_e \delta \mathbf{U}^T \left(\int_{\Omega_0} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} d\Omega_0 \right) \mathbf{U} d\Omega_0 \\ = \sum_e \delta \mathbf{U}^T \cdot \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{t} d\Gamma_t^e + \sum_e \delta \mathbf{U} \cdot \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{b} d\Omega^e \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

が得られる。式(3.2.12)は、

$$\delta \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \delta \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{F} \quad (3.2.13)$$

とまとめることができる。ここで、

$$\mathbf{K} = \sum_e \int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} d\Omega_0^e \quad (3.2.14)$$

$$\mathbf{F} = \sum_e \int_{\Gamma_0^e} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{t} d\Gamma_0^e + \int_{\Omega_0^e} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{b} d\Omega_0^e \quad (3.2.15)$$

式(3.2.14)、式(3.2.15)で定義されるマトリックスおよびベクトルの成分は、有限要素ごとに計算し、重ね合わせることができる。

式(3.2.13)が任意の仮想変位 $\delta \mathbf{U}$ について成立することにより次式を得る。

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.2.16)$$

一方、変位境界条件式は次式のように表される。

$$\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}} \quad (3.2.17)$$

式(3.2.16)を拘束条件式(3.2.17)のもとで解くことにより、節点変位 \mathbf{U} を決定することができる。

3.2.2. Total Lagrange 法

時刻 0 の初期配置を基準とする時刻 t_{n+1} での内部仮想仕事の式は、式(2.3.8)から、

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{S}_{n+1} : \delta \dot{\mathbf{E}} d\Omega_0 = \int_{\Gamma_0} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \delta \mathbf{v} d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega_0 \quad (3.2.18)$$

で与えられる。この式における Green-Lagrange ひずみの変分 $\delta \mathbf{E}$ について考える。

図 3.2.1 に示すように、時刻 t_n から時刻 t_{n+1} における変位の分解式を

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u} \quad (3.2.19)$$

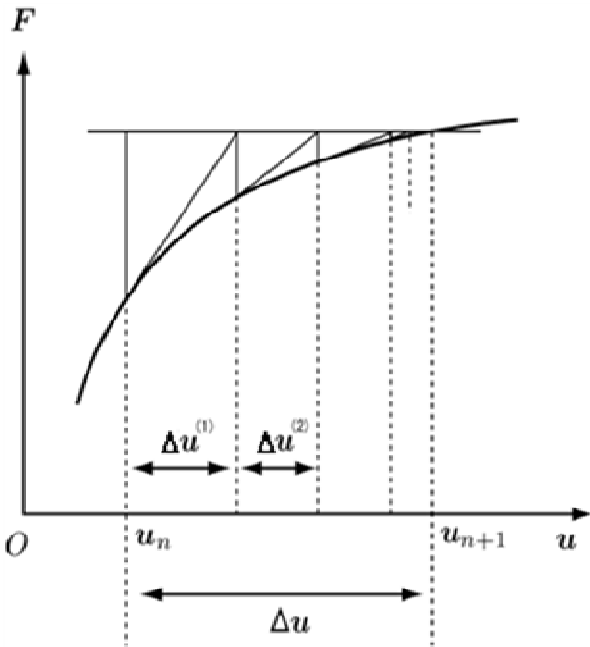


図 3.2.1 変位ベクトルの定義

で表されるものとする。また、後に示す非線形有限要素解析の反復法のことを考え、時刻 t_n から時刻 t_{n+1} における反復時の変位増分 $\Delta \mathbf{u}^{(k)}$ についても以下のように定義しておく。

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}^{(1)} + \Delta \mathbf{u}^{(2)} + \dots + \Delta \mathbf{u}^{(n)} = \sum_{k=1}^n \Delta \mathbf{u}^{(k)} \quad (3.2.20)$$

このとき、Green-Lagrange ひずみ \mathbf{E}_{n+1} は、式(2.2.21)より、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{n+1} &= \frac{1}{2} \{ (\mathbf{u}_{n+1} \otimes \nabla_{\mathbf{X}}) + (\mathbf{u}_{n+1} \otimes \nabla_{\mathbf{X}})^T + (\mathbf{u}_{n+1} \otimes \nabla_{\mathbf{X}})^T \cdot (\mathbf{u}_{n+1} \otimes \nabla_{\mathbf{X}}) \} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial \mathbf{X}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial \mathbf{X}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial \mathbf{X}} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) + \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial \mathbf{X}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) \right\} \\ &= \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_{n,L} + \mathbf{E}_{n,NL} \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

となる。ここで、

$$\mathbf{E}_{n,L} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) + \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) + \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial \mathbf{X}} \right) \right\} \quad (3.2.22)$$

$$\mathbf{E}_{n,NL} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) \right\} \quad (3.2.23)$$

とする。ここで、有限要素離散式(3.2.10)を利用すると

$$\mathbf{E}_{n,L} = \mathbf{B}_{n,L} \mathbf{U}; \quad \mathbf{E}_{n,NL} = \mathbf{B}_{n,NL} \mathbf{U} \quad (3.2.24)$$

が得られる(第5章を参照)。 \mathbf{E}_n は既知なので、 \mathbf{E}_{n+1} の変分は、

$$\delta \mathbf{E}_{n+1} = \delta \mathbf{E}_{n,L} + \delta \mathbf{E}_{n,NL} \quad (3.2.25)$$

と表せる。ここで、

$$\delta \mathbf{E}_{n,L} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) + \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial \mathbf{X}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) \right\} \quad (3.2.26)$$

$$\delta \mathbf{E}_{n,NL} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) + \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) \right\} \quad (3.2.27)$$

である。

また、時刻 t_n から時刻 t_{n+1} における第2 Piola-Kirchhoff 応力の分解式を

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_n + \Delta \mathbf{S} \quad (3.2.28)$$

で表されるものとする、式(3.2.18)は、

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \Delta \mathbf{S} : (\delta \mathbf{E}_{n,L} + \delta \mathbf{E}_{n,NL}) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{S}_n : \delta \mathbf{E}_{n,NL} d\Omega_0 \\ &= \delta W_{n+1}^{\text{ext}} - \int_{\Omega_0} \mathbf{S}_n : \delta \mathbf{E}_{n,L} d\Omega_0 \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

と与えられる。ここで、 $\delta \mathbf{E}_{n+1}$ は $\Delta \mathbf{u}$ の線形関数であるので、左辺第 1 項目は $\Delta \mathbf{u}$ について非線形になる。一方、左辺第 2 項目は \mathbf{S}_n が既知であるから、 $\delta \mathbf{E}_{n,NL}$ のみによって $\Delta \mathbf{u}$ に関して線形であり、右辺第 2 項も既知である。

さらに、接線剛性を求めるために、式(3.2.29)に対して、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとり、 \mathbf{u} に関して 2 次以上となる項 $\Delta \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}_{n,NL}$ を無視すると

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{ (3.2.29) \text{左辺} \} / \Delta t = \int_{\Omega_0} \dot{\mathbf{S}}_n : \delta \mathbf{E}_{n,L} dV + \int_{\Omega_0} \mathbf{S}_n : (\delta \mathbf{E}_{n,NL})' dV \quad (3.2.30)$$

となる。ここで、 $(\dot{\Delta \mathbf{S}}) = \dot{\mathbf{S}}_n$ 、 $\Delta \mathbf{u} / \Delta t = \dot{\mathbf{u}}$ および

$$(\delta \mathbf{E}_{n,NL})' = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{X}} \right) + \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) \right\} \quad (3.2.31)$$

である。さらに、時刻での平衡状態において $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_n$ を仮定し、式(3.2.25)から、

$$\delta \mathbf{E}_{n,L} = \delta \mathbf{E}_n \quad (3.2.32)$$

となる。また、式(3.2.31)の右辺は

$$(\delta \mathbf{E}_{n,NL})' = (\delta \mathbf{E}_n)' \quad (3.2.33)$$

と表せる。したがって、

$$\text{式(3.2.30)} = \int_{\Omega_0} \dot{\mathbf{S}}_n : \delta \mathbf{E}_n d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{S}_n : (\delta \mathbf{E}_n)' dV \quad (3.2.34)$$

となる。ここで、仮に $\dot{\mathbf{S}}_n$ が 4 階のテンソル \mathbf{C}_n と $\dot{\mathbf{E}}_n$ によって表されるものとする、

$$\dot{\mathbf{S}}_n = \mathbf{C}_n : \dot{\mathbf{E}}_n \quad (3.2.35)$$

より、式(3.2.34)に代入して、離散化すると、

$$\begin{aligned} \text{式(3.2.34)} &= \int_{\Omega_0} (\mathbf{C}_n : \dot{\mathbf{E}}_n) : \delta \mathbf{E}_n d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{S}_n : (\delta \mathbf{E}_n)' dV \\ &= \delta \mathbf{U}^T \cdot \left(\sum_e \int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}_{n,L}^T \cdot \mathbf{D}_n \cdot \mathbf{B}_{n,L} d\Omega_0^e \right) \cdot \dot{\mathbf{U}} \\ &\quad + \delta \mathbf{U}^T \cdot \left(\sum_e \int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}_{n,NL}^T \cdot \mathbf{S}_n \cdot \mathbf{B}_{n,NL}^T d\Omega_0^e \right) \cdot \dot{\mathbf{U}} \\ &= \delta \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K}_{n,L} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \delta \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K}_{n,NL} \cdot \dot{\mathbf{U}} \\ &= \delta \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K}_n \cdot \dot{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

となる。ただし、

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{K}_{n,L} + \mathbf{K}_{n,NL} \quad (3.2.37)$$

$$\mathbf{K}_{n,L} = \sum_e \int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}_{n,L}^T \cdot \mathbf{D}_n \cdot \mathbf{B}_{n,L} d\Omega_0^e \quad (3.2.38)$$

$$\mathbf{K}_{n,NL} = \sum_e \int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}_{n,NL}^T \cdot \mathbf{S}_n \cdot \mathbf{B}_{n,NL}^T d\Omega_0^e \quad (3.2.39)$$

である。一方、式(3.2.29)の右辺を離散化すると

$$(3.2.29) \text{の右辺} = \delta \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{F}_{n+1} - \Delta \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{Q}_n \quad (3.2.40)$$

となる。ただし、 \mathbf{F}_{n+1} は外力を表し、形状関数を用いる (第 5 章を参照)。

$$\mathbf{F}_{n+1} = \sum_e \int_{\Omega_0^e} \mathbf{N}_n^T \cdot \mathbf{t}_{n+1} d\Omega_0^e + \sum_e \int_{\Omega_0^e} \rho_0 \mathbf{N}_n^T \cdot \mathbf{g}_{n+1} d\Omega_0^e \quad (3.2.41)$$

また、

$$\mathbf{Q}_n = \sum_e \int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}_{n,L}^T \cdot \mathbf{S}_n d\Omega_0^e \quad (3.2.42)$$

は時刻 t_n の等価節点力を表している。

3.2.3. updated Lagrange 法

時刻 t_n の現配置を参照配置とする時刻 t_{n+1} での内部仮想仕事式は、

$$\int_{\Omega_n} \mathbf{S}_{n+1} : \delta \mathbf{E}_{n+1} d\Omega = \int_{\Gamma_n} \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \cdot \delta \mathbf{v} d\Gamma_n + \int_{\Omega_n} \rho_{n+1} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega_n \quad (3.2.43)$$

である。ここでは、Green-Lagrange ひずみの変分は式(3.2.25)で表している。一方、時刻 t_{n+1} の応力は、

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_n + \Delta \mathbf{S}_n = \boldsymbol{\sigma}_n + \Delta \mathbf{S}_n \quad (3.2.44)$$

と分解されるものと考え、内部仮想仕事式(3.2.43)は、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} (\Delta \mathbf{S}) : (\delta \mathbf{E}_{n,L} + \delta \mathbf{E}_{n,NL}) d\Omega + \int_{\Omega_n} \mathbf{S}_n : \delta \mathbf{E}_{n,NL} d\Omega \\ = w_{n+1}^{\text{ext}} - \int_{\Omega_n} \boldsymbol{\sigma}_n : \delta \mathbf{E}_{n,L} d\Omega \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

となる。

次に、接線剛性を求めるために、 $\Delta t \rightarrow 0 (\Delta \mathbf{u} = 0)$ の極限をとると、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{ \text{式 3.2.45 左辺} \} / \Delta t = \quad (3.2.46)$$

$$\int_{\Omega_n} \dot{\mathbf{S}}_n : \delta \mathbf{E}_{n,L} d\Omega + \int_{\Omega_n} \boldsymbol{\sigma}_n : (\delta \mathbf{E}_{n,NL})' d\Omega$$

となる。ここで、 $(\Delta \mathbf{S}_n : \delta \mathbf{E}_{n,NL}) / \Delta t \rightarrow 0$ であり、 $\Delta \mathbf{S}_n / \Delta t \rightarrow \dot{\mathbf{S}}_n$ 、 $\Delta \mathbf{u} / \Delta t \rightarrow \dot{\mathbf{u}}$ および

$$(\delta \mathbf{E}_{n,NL})' = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \Delta \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left(\frac{\partial \Delta \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right\} \quad (3.2.47)$$

である。さらに、時刻 t_n での平衡状態において $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_n$ を仮定していることから、

$$\delta \mathbf{E}_{n,L} = \delta \mathbf{E}_n \quad (3.2.48)$$

$$(\delta \mathbf{E}_{n,NL})' = (\delta \mathbf{E}_n)' \quad (3.2.49)$$

となるので、

$$\text{式(3.2.46)} = \int_{\Omega_n} \dot{\mathbf{S}}_n : \delta \mathbf{E}_n d\Omega + \int_{\Omega_n} \boldsymbol{\sigma}_n : (\delta \mathbf{E}_n)' d\Omega \quad (3.2.50)$$

となる。ここで、仮に、 $\dot{\mathbf{S}}_n$ が 4 階のテンソル \mathbf{c}_n と Green-Lagrange ひずみ \mathbf{E}_n により、

$$\dot{\mathbf{S}}_n = \mathbf{c}_n : \mathbf{E}_n \quad (3.2.51)$$

と表すことができるとしたとき、式(3.2.50)に代入して、離散化すると、

$$\begin{aligned} \text{式(3.2.50)} &= \int_{\Omega} (\mathbf{c}_n : \mathbf{E}_n) : \delta \mathbf{E}_n d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_n : (\delta \mathbf{E}_n)' d\Omega \\ &= \delta \mathbf{u} \cdot \left(\sum_e \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_{n,L}^T \cdot \bar{\mathbf{D}}_n \cdot \mathbf{B}_{n,L}^T d\Omega^e \right) \cdot \dot{\mathbf{u}} + \\ &\quad \mathbf{u} \cdot \left(\sum_e \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_{n,NL}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{B}_{n,NL}^T d\Omega^e \right) \cdot \dot{\mathbf{u}} \\ &= \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_{n,L} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_{n,NL} \cdot \dot{\mathbf{u}} \\ &= \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_n \cdot \dot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (3.2.52)$$

となる。ここで、

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{K}_{n,L} + \mathbf{K}_{n,NL} \quad (3.2.53)$$

$$\mathbf{K}_{n,L} = \sum_e \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_{n,L}^T \cdot \bar{\mathbf{D}}_n \cdot \mathbf{B}_{n,L} d\Omega^e \quad (3.2.54)$$

$$\mathbf{K}_{n,NL} = \sum_e \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_{n,NL}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{B}_{n,NL} d\Omega^e \quad (3.2.55)$$

である。一方、式(3.2.45)の右辺を離散化すると

$$\text{式(3.2.45)の右辺} = \delta \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{F}_{n+1} - \Delta \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{Q}_n \quad (3.2.56)$$

となる。ただし、 \mathbf{F}_{n+1} は外力を表し、形状関数を用いる (第 5 章を参照)。

$$F_{n+1} = \sum_e \int_{S_n^e} N_n^T \cdot t_{n+1} dS_n^e + \sum_e \int_{\Omega_n^e} \rho_0 N_n^T \cdot g_{n+1} d\Omega_n^e \quad (3.2.57)$$

また、

$$Q_n = \sum_e \int_{\Omega_n^e} B_{n,L}^T \cdot \sigma_n d\Omega_n^e \quad (3.2.58)$$

は時刻 t_n の等価節点力を表している。

3.3. Newton-Raphson 法

上記で得られた全体剛性マトリクスは非線形であるため、その接線剛性を用い、反復計算手法を利用し解く必要がある。本ソフトでは、もっとも一般的に用いられる Newton-Raphson 法を採用している。

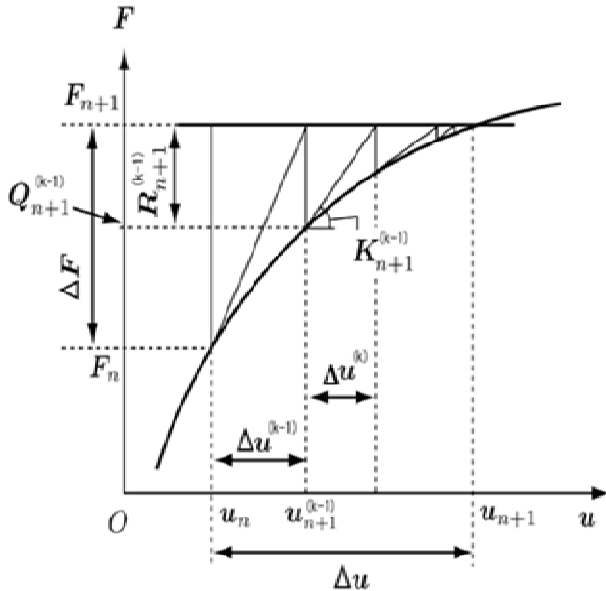


図 3.3.1 Newton-Raphson 法

時刻 t_n におけるつり合い状態を考えると、時刻 t_n での内力ベクトル Q_n と外力ベクトル F_n は、

$$Q_n = F_n \quad (3.3.1)$$

と書くことができる。通常、有限要素法では運動方程式に対して線形化を行うため、 Q_n は剛性マトリックス K を用いて、

$$Q_n = K \cdot u_n \quad (3.3.2)$$

と書くことができる。ここで、 u_n は変位ベクトルで

ある。このとき、式(3.3.1)および式(3.3.2)より

$$u_n = K^{-1} \cdot F_n \quad (3.3.3)$$

として解が求められる。しかしながら、非線形問題では繰り返し計算なしでは式(3.3.1)のようなつり合い状態を満足しない。以下では、繰り返し計算を目的とした説明を行う。

時刻 t_n および t_{n+1} での応力状態がつり合い状態にある場合、時刻 t_n から t_{n+1} までの荷重増分と変位増分の関係は、図 3.3.1 で示すように

$$\Delta F = \underline{K}_n \cdot \Delta u \quad (3.3.4)$$

と書ける。そのため、時刻 t_n におけるつり合い状態での解が得られている場合、次の時刻 t_n の外力に対する変位は、

$$\Delta u \approx \underline{K}_n^{-1} \cdot \Delta F \quad (3.3.5)$$

となる。このとき、本作業における変位ベクトルに関する定義は次の通りとする。

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u \quad (3.3.6)$$

$$\Delta u = \Delta u^{(1)} + \Delta u^{(2)} + \dots + \Delta u^{(n)} = \sum_{i=1}^k \Delta u^{(i)} \quad (3.3.7)$$

ただし、式(3.3.5)を解いただけでは、つり合い状態を満足していない。そこで、式(3.3.5)で得られる反復 1 回の変位修正ベクトルを $\Delta u^{(1)}$ として変位を更新し、つり合い方程式に代入すると、

$$u_{n+1}^{(1)} = u_n + \Delta u^{(1)} \quad (3.3.8)$$

$$R_{n+1}^{(1)} = F_{n+1} - Q_{n+1}^{(1)}(u_{n+1}^{(1)}) \quad (3.3.9)$$

となる。ここで、 R_{n+1} は残差荷重ベクトルであり、

$R_{n+1} = 0$ を満たしたときにつり合い状態となる。

さらに、第 k 回目の反復における変位修正ベクトルは、

$$\Delta u^{(k)} = K_{n+1}^{(k-1)^{-1}} \cdot R_{n+1}^{(k-1)} \quad (3.3.10)$$

$$R_{n+1}^{(k-1)} = F_{n+1} - Q_{n+1}^{(k-1)}(u_{n+1}^{(k-1)}) \quad (3.3.11)$$

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{u}_{n+1}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{u}^{(k)} \quad (3.3.12)$$

と書くことができる。ここで、第 0 回目の反復時における値を時刻 t_n における収束解、

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{u}_n \quad (3.3.13)$$

$$\mathbf{K}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{K}_n \quad (3.3.14)$$

$$\mathbf{Q}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{Q}_n (= \mathbf{F}_n) \quad (3.3.15)$$

と定義する。

Newton-Raphson 法では、残差がなくなるまで式(3.3.9)～式(3.3.14)の手順を繰り返し行い、収束解を求める方法である。このとき、接線剛性マトリックス $\mathbf{K}_{n+1}^{(k-1)}$ の更新は毎回行うものとする。これは、毎回の更新を行うことで収束解に至るまで反復回数を少なくすることを考慮したためである。

上記のような非線形方程式の解は、残差荷重ベクトルの各成分がゼロになる時点を受束点としている。しかしながら、数値解析において残差荷重ベクトルがゼロになることはないため、通常はある程度の許容値を持って収束と判定することとしている。Advance/FrontSTR では節点残差力を用いて

$$\sqrt{\mathbf{R}_{n+1}^{(k)T} \cdot \mathbf{R}_{n+1}^{(k)}} < \text{tol} \times \sqrt{\mathbf{F}_{\text{ext}}^T \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}} \quad (3.3.16)$$

で収束の判定をしている。ここでは、 \mathbf{F}_{ext} は外部荷重ベクトルであり、tol は収束判定閾値である。

4. 材料ライブラリ

4.1. 線形弾性材料

変形に伴うひずみと回転が微小であることを前提とした微小ひずみ理論に基づいた弾性構成式について説明を行う。ここでは、変形体の参照配置、現配置などの区別が必要がなく、応力とひずみの定義も特に意識する必要がなく用いている。

線形弾性材料における応力 - ひずみ則は、

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.1.1)$$

で与えられる。ここで、 \mathbf{D} は 4 階の接線係数であり、温度に依存する可能性があるが、変形状態などに依存しない材料常数を表している。 $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力であり、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は(3.2.7)で与えられた微小変形ひずみ、または工学ひずみと呼ばれる線形なひずみである。一般的な場合には、 \mathbf{D} は 21 個の成分を持つが、本ソフトウェアは等方性を持つ線弾性材しか考慮していない。このとき λ , μ 次のように表現できる。

$$\mathbf{D} = \lambda (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.1.2)$$

線形弾性材料の使用前提は変形に伴うひずみと回転が微小であることであり、これが幾何非線形仮想仕事式(3.2.17)と対応する。そのため、線形弾性材料を利用し、幾何非線形を考慮する解析を指定すると矛盾が生じることになる。そのとき、Advance/FrontSTR はユーザーから入力した線弾性係数を利用し、式(4.1.1)を以下のように書き換え、幾何非線形を考慮した解析を行う。

$$\mathbf{S} = \lambda (\text{tr } \mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.1.3)$$

このとき、式(4.1.3)から得られる材料接線係数 \mathbf{D} は変形状態の関数になり、超弾性材料の 1 つに St. Venant-Kirchhoff 超弾性モデルになる。

4.2. 超弾性材料

超弾性 (hyperelastic) 材料とは、弾性ポテンシャル関数を持ち、応力はそのポテンシャルを変形やひずみの成分によって微分されることにより求められる。

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial w(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \quad (4.2.1)$$

ここで、 ψ は弾性ポテンシャルである。弾性ポテンシャルが Green-Lagrange ひずみの関数 \mathbf{E} として表されるとき、その弾性ポテンシャルは w で表されるものとする。このときの 2 つのスカラー量の関係は $w(\mathbf{E}) = \psi(2\mathbf{E} + \mathbf{I})$ となる。超弾性材料がする仕事は変形経路に対して独立なものであり、これは弾性ポテンシャル関数が存在することを示している。こ

のような挙動は多くのゴム材料の挙動と似たものである。変形経路に対する仕事の独立性は、変形状態 \mathbf{C}_1 から \mathbf{C}_2 における参照する単位体積当たりの弾性エネルギーを考慮したものである。このことは、第 2 Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} と Green-Lagrange ひずみ $\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I})/2$ は共役な関係であることから、

$$\int_{\mathbf{E}_1}^{\mathbf{E}_2} \mathbf{S} : d\mathbf{E} = w(\mathbf{E}_2) - w(\mathbf{E}_1), \quad (4.2.2)$$

$$\text{or} \quad \frac{1}{2} \int_{\mathbf{C}_1}^{\mathbf{C}_2} \mathbf{S} : d\mathbf{C} = \psi(\mathbf{C}_2) - \psi(\mathbf{C}_1)$$

と与えられることになる。そして、材料に蓄えられたエネルギーは初期の状態と最終変形状態にのみ依存するものであり、変形経路（荷重経路）に対しては独立である。

超弾性材の変形は変形履歴に依存せず、その構成式は第 2 Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} を利用しているため、Advance/FrontSTR は 3.2.2 節に示した Total Lagrange 法を用い解析を行う。

・ 等方性を持つ超弾性材料

超弾性材料における弾性ポテンシャルエネルギーは、応力の作用していない初期状態からの等方性を持った応答から得られるものであり、右 Cauchy-Green 変形テンソル \mathbf{C} の主不変量 (I_1, I_2, I_3) 、または体積変化成分を除いた右 Cauchy-Green 変形テンソル $\bar{\mathbf{C}}$ のの主不変量 $(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3)$ 関数（つまり、 $\psi = \psi(I_1, I_2, I_3)$ あるいは $\psi = \psi(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3)$ ）として表すことができる。このとき、2 階のテンソルの主不変量やそれらの導関数は弾性構成式や弾塑性構成式を表すためによく用いられることから、これらの数学的な表記について以下に示す。

2 階のテンソル \mathbf{A} の主不変量は、以下の式で与えられる。

$$I_1(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}) \quad (4.2.3)$$

$$I_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \{ \text{tr}(\mathbf{A})^2 - \text{tr}(\mathbf{A}^2) \} \quad (4.2.4)$$

$$I_3(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \quad (4.2.5)$$

\mathbf{A} が文章中で自明であるとき、 I_1, I_2, I_3 と省略する場合もある。ここで、 \mathbf{A} が $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ という対称性を持つなら、 \mathbf{A} は 3 つの実固有値（主値） $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を持ち、

$$I_1(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (4.2.6)$$

$$I_2(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \quad (4.2.7)$$

$$I_3(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad (4.2.8)$$

となる。

超弾性材料の第 2 Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} が式(4.2.1)より与えられ、その接線剛性は以下になる。

$$\mathbf{D} = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad (4.2.9)$$

以下では、Advance/FrontSTR 内に実装した超弾性モデルを列挙する。

4.2.1. 多項式超弾性モデル

弾性ポテンシャル関数を多項式で表し、そのもっとも一般的な式は以下になる。

$$\psi = \sum_{i+j=1}^N B_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} (J - 1)^{2i} \quad (4.2.10)$$

ここで、 B_{ij} と D_i は材料定数であり、 J は変形 Jacobian である。この式は体積変化を除いた変形エネルギーと体積変化エネルギーを分けて表し、解析上には便利である。特に材料定数 D_i は十分小さい場合には、材料の非圧縮性を近似に表すことができる。ただし、本ソフトウェアは完全非圧縮性材料 ($D_i=0$) は表現できない。その弾性構成式は

$$S_{KL} = 2 \left\{ \sum_{i+j=1}^N B_{ij} \left[i(\bar{I}_1 - 3)^{i-1}(\bar{I}_2 - 3)^j \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial C_{kl}} + j(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3)^{j-1} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial C_{kl}} \right] + \sum_{i=1}^N \frac{2i}{D_i} (-1)^{2i-1} \frac{\partial J}{\partial C_{KL}} \right\} \quad (4.2.11)$$

であり、その接線構成式は以下である。

$$\begin{aligned} \frac{D_{KLMN}}{4} = & \sum_{i+j=1}^N B_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^{i-2} (\bar{I}_2 - 3)^{j-2} \\ & \left[i(i-1)(\bar{I}_2 - 3)^2 \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial C_{KL}} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial C_{MN}} + ij(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial C_{KL}} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial C_{MN}} \right. \\ & + i(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3)^2 \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial C_{KL} \partial C_{MN}} \\ & + ij(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial C_{KL}} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial C_{MN}} \\ & + j(j-1)(\bar{I}_1 - 3)^2 \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial C_{KL}} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial C_{MN}} \\ & \left. + j(\bar{I}_1 - 3)^2 (\bar{I}_2 - 3) \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial C_{KL} \partial C_{MN}} \right] \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{2i(j-1)^{2i-2}}{D_i} \left[(2i-1) \frac{\partial J}{\partial C_{KL}} \frac{\partial J}{\partial C_{MN}} + (j-1) \frac{\partial^2 J}{\partial C_{KL} \partial C_{MN}} \right] \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

4.2.2. 低減多項式超弾性モデル

低減多項式超弾性モデルは多項式超弾性モデルの一種である。

$$\psi = \sum_{i=1}^N B_{i0} (\bar{I}_1 - 3)^i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} (J - 1)^{2i} \quad (4.2.13)$$

4.2.3. Neo-Hookean 超弾性モデル

Neo-Hookean 超弾性モデルは等方性を持つ線形則 (Hooke 則) を大変形問題へ対応できるように拡張したものである。その弾性ポテンシャルは以下である。

$$\psi = B_{10} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{D} (J - 1)^2 \quad (4.2.14)$$

このモデルも多項式超弾性モデルの一種である。

4.2.4. Mooney-Rivlin 超弾性モデル

Mooney and Rivlin 超弾性モデルの弾性ポテンシャル関数は

$$\psi = B_{10} (\bar{I}_1 - 3) + B_{01} (\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{D} (J - 1)^2 \quad (4.2.15)$$

である。このモデルも多項式超弾性モデルの一種である。

4.2.5. Yeoh 超弾性モデル

Yeoh 超弾性モデルの弾性ポテンシャル関数は

$$\begin{aligned} \psi = & B_{10} (\bar{I}_1 - 3) + B_{20} (\bar{I}_1 - 3)^2 + B_{30} (\bar{I}_1 - 3)^3 \\ & + \frac{1}{D_1} (J - 1)^2 + \frac{1}{D_2} (J - 1)^4 + \frac{1}{D_3} (J - 1)^6 \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

である。このモデルも多項式超弾性モデルの一種である。

4.2.6. Arruda-Boyce 超弾性モデル

Arruda-Boyce 超弾性モデルの弾性ポテンシャル関数は、

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{2} \mu \left[\frac{(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{10\lambda_m^2} (\bar{I}_1^2 - 9) + \frac{11}{525\lambda_m^4} (\bar{I}_1^3 - 27) + \frac{19}{3500\lambda_m^6} (\bar{I}_1^4 - 81)}{+ \frac{519}{336875\lambda_m^8} (\bar{I}_1^5 - 243)} \right] \\ + \frac{1}{D} \left(\frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right) \end{aligned}$$

(4.2.17)

となる。多項式超弾性モデル材と同じく、ここでは弾性ポテンシャル関数は体積変化を除いた変形エネルギーと体積変化エネルギーを分けて表す。

Arruda-Boyce の弾性構成式は

$$S_{KL} = 2 \left[\mu \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10\lambda_m^2} \bar{I}_1^2 + \frac{33}{1050\lambda_m^4} \bar{I}_1^2 + \frac{76}{7000\lambda_m^6} \bar{I}_1^2 + \frac{2595}{673750\lambda_m^8} \bar{I}_1^2 \right) \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial C_{kl}} + \frac{1}{D} \left(J - \frac{1}{J} \right) \frac{\partial J}{\partial C_{kl}} \right] \quad (4.2.18)$$

であり、その接線構成式は

$$\begin{aligned} \frac{D_{KLMN}}{4} = & \mu \left(\frac{1}{10\lambda_m^2} + \frac{1}{1050\lambda_m^4} \bar{I}_1 + \frac{1}{7000\lambda_m^6} \bar{I}_1^2 + \frac{1}{673750\lambda_m^8} \bar{I}_1^3 \right) \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial C_{KL}} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial C_{MN}} \\ & + \mu \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10\lambda_m^2} + \frac{1}{1050\lambda_m^4} \bar{I}_1 + \frac{1}{7000\lambda_m^6} \bar{I}_1^2 + \frac{1}{673750\lambda_m^8} \bar{I}_1^3 \right) \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial C_{KL} \partial C_{MN}} \\ & + \frac{1}{D} \left(1 + \frac{1}{(J^{el})^2} \right) \frac{\partial J^{el}}{\partial C_{KL}} \frac{\partial J^{el}}{\partial C_{MN}} + \frac{1}{D} \left(J^{el} - \frac{1}{J^{el}} \right) \frac{\partial^2 J^{el}}{\partial C_{KL} \partial C_{MN}} \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

である。

4.2.7. Ogden 超弾性モデル

Ogden 材の弾性ポテンシャルは以下である。

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} (\bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i} - 3) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} (J^{el} - 1)^{2i}$$

$$\bar{\lambda}_i := \frac{\lambda_i}{J^{\frac{1}{3}}} = \frac{\lambda_i^{2/3}}{\lambda_j^{2/3} \lambda_k^{2/3}} \quad j, k \neq i \quad (4.2.20)$$

ここでは λ_i は変形主軸方向の伸び量であり、 $\bar{\lambda}_i$ 偏差主軸方向伸びと呼ばれる。特に $N=1$ 、 $\alpha_i = 2$ のとき、(4.2.14)の Neo-Hookean 超弾性モデルとなり、 $N = 2$, $\alpha_1 = 2$, and $\alpha_2 = -2$ のとき、(4.1.15)の Mooney-Rivlin 超弾性モデルとなる。

Ogden の弾性構成式は

$$S_{KL} = 2 \left[\sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} \left(\sum_{k=1}^3 \bar{\lambda}_k^{\alpha_i-1} \frac{\partial \bar{\lambda}_k}{\partial C_{KL}} \right) + \sum_{i=1}^N \frac{2i}{D_i} (J - 1)^{2i-1} \frac{\partial J}{\partial C_{KL}} \right] \quad (4.2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_{KLMN}}{4} = & \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} \left[(\alpha_i - 1) \sum_{k=1}^3 \bar{\lambda}_k^{\alpha_i-2} \frac{\partial \bar{\lambda}_k}{\partial C_{KL}} \frac{\partial \bar{\lambda}_k}{\partial C_{MN}} + \sum_{k=1}^3 \bar{\lambda}_k^{\alpha_i-1} \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_k}{\partial C_{KL} \partial C_{MN}} \right] \\ & + \sum_{i=1}^N \left[\frac{2i(2i-1)}{D_i} (J - 1)^{2i-1} \frac{\partial J}{\partial C_{KL}} \frac{\partial J}{\partial C_{MN}} + \frac{2i}{D_i} (J - 1)^{2i-1} \frac{\partial^2 J}{\partial C_{KL} \partial C_{MN}} \right] \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

である。

4.2.8. 発泡超弾性体モデル

以下のモデルは、圧縮性の高い泡状物質の超弾性の性質を表す。

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} \left\{ \bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i} - 3 + \frac{1}{\beta_i} [(J)^{-\alpha_i \beta_i} - 1] \right\}$$

$$\bar{\lambda}_i := \frac{\lambda_i}{J^{\frac{1}{3}}} \quad (4.2.23)$$

ここでは μ_i , α_i , β_i 材質である。 β_i は以下のように Poisson 比 ν_i と関連づける。

$$\beta_i = \frac{\nu_i}{1 - 2\nu_i} \quad (4.2.24)$$

発泡超弾性モデルの弾性構成式は

$$S_{KL} = 2 \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} \left[\sum_{k=1}^3 \bar{\lambda}_k^{\alpha_i-1} \frac{\partial \bar{\lambda}_k}{\partial C_{KL}} + J^{-\alpha_i \beta_i - 1} \frac{\partial J}{\partial C_{KL}} \right] \quad (4.2.25)$$

であり、その接線構成式は

$$D_{KLMN} = 8 \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i^2}$$

$$\left[\begin{aligned} & (\alpha_i - 1) \sum_{k=1}^3 \bar{\lambda}_k^{\alpha_i-2} \frac{\partial \bar{\lambda}_k}{\partial C_{KL}} \frac{\partial \bar{\lambda}_k}{\partial C_{MN}} \\ & + \sum_{k=1}^3 \bar{\lambda}_k^{\alpha_i-1} \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_k}{\partial C_{KL} \partial C_{MN}} + (\alpha_i \beta_i + 1) J^{-\alpha_i \beta_i - 2} \frac{\partial J^{el}}{\partial C_{KL}} \frac{\partial J^{el}}{\partial C_{KL}} \\ & - J^{-\alpha_i \beta_i - 1} \frac{\partial^2 J}{\partial C_{KL} \partial C_{MN}} \end{aligned} \right] \quad (4.2.26)$$

である。

4.2.9. St. Venant-Kirchhoff 超弾性モデル

このモデルは線弾性構成式の直接拡張であり、その詳細は式(4.1.3)に示している。

4.3. 弾塑性材料

弾塑性材料の特徴は以下の通りである。

1. 弾性領域が存在する。
2. 物体内の応力は一定値（降伏応力）を超えると、不可逆の塑性ひずみが生じる。
3. 塑性ひずみの発展に伴い、降伏応力も変化する。これを硬化現象と呼ぶ。

弾塑性変形解析にあたって、まず降伏が始まると考えられる応力状態を規定する降伏条件が必要になる。また降伏が生じたのちの挙動を記述する塑性流動の法則が必要になり、硬化現象を記述する法則が必要になる。

弾塑性変形は金属や土などよく現る現象である。弾塑性変形挙動は変形履歴に依存し、Advance/FrontSTR は 3.2.3 節に示した updated Lagrange 法を用い解析を行う。

4.3.1. 亜弾性 - 塑性材料モデル

亜弾性 - 塑性モデルは、弾性ひずみが塑性ひずみと比較して小さい場合に用いられる。このような問題において構成モデルは変形速度テンソル \mathbf{d} を弾性成分と塑性成分に加算分解し、

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p \quad (4.3.1)$$

と定義する。上記の仮定を採用すると、弾性応力とひずみの関係は弾性ポテンシャル関数より得られ

なくなり、物理的に望ましくないという指摘がある[9]が、弾性ひずみが十分小さい場合では、これを見捨てることのできる。

以下では、Cauchy 応力の Jaumann 速度を主とした構成関係を中心に展開する。弾性部分の構成関係には亜弾性構成式

$$\boldsymbol{\sigma}^{\sigma J} = \mathbf{c}_{el}^{\sigma J} : \mathbf{d}^e = \mathbf{c}_{el}^{\sigma J} : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) \quad (4.3.2)$$

を適用する。また、塑性流れに関する塑性の変形速度テンソルは、

$$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \quad (4.3.3)$$

として与えられる。ここで、 $\dot{\lambda}$ は塑性率パラメータ (plastic rate parameter) であり \mathbf{q} は内部変数である。 $\mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$ は塑性流れの方向を示し、

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.3.4)$$

で与えられる。ここで、 Ψ は塑性ポテンシャル (plastic flow potential) である。この塑性流れの方向は Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}$ と内部変数 \mathbf{q} に依存する。例えば、スカラー量の内部変数は有効塑性ひずみ (もしくは相当塑性ひずみ) (effective [equivalent] plastic strain) から構成される。幾何学的な効果モデルにおける背応力 (back stress) も 2 階のテンソルで表記される内部変数である。ただし、この節では背応力の存在を考慮せず、内部変数はスカラー量の集合としている。ここでは、塑性ポテンシャル Ψ は降伏関数(式 4.3.6)と同じである場合は、式 (4.3.4)は関連流れ則と呼ぶ。

内部変数に対する発展方程式は、塑性モデルの場合、

$$\mathbf{q} = \dot{\lambda} \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}), \quad \mathbf{q}_\alpha = \dot{\lambda} \mathbf{h}_\alpha(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \quad (4.3.5)$$

で表される。ここで、 α は考慮した内部関数の数である。塑性パラメータに対する降伏条件

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (4.3.6)$$

を用いて、さらに Kuhn-Tucker の負荷・除荷条件

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \dot{\lambda} f = 0 \quad (4.3.7)$$

より導かれる(式 4.3.10 を参照)。

塑性負荷状態 $\dot{\lambda} > 0$ における応力は降伏面 $f = 0$ に残っており、式(4.3.6)の適合条件の客観速度ゼロであることにあたる。そして、

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\sigma}^{\nabla} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} : \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (4.3.8)$$

が得られる。

さらに、式(4.3.8)の中に亜弾性材料の構成関係式(4.3.2)と塑性流れ関係式(4.3.3)、発展方程式(4.3.5)を適用すると、

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{c}_{\text{el}}^{\sigma} : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} : \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{c}_{\text{el}}^{\sigma} : (\mathbf{d} - \dot{\lambda} \mathbf{r}) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} : \dot{\lambda} \mathbf{h} = 0 \quad (4.3.9)$$

となることから、塑性率パラメータ $\dot{\lambda}$ は

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{c}_{\text{el}}^{\sigma} : \mathbf{d}}{-\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} : \mathbf{h} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{c}_{\text{el}}^{\sigma} : \mathbf{r}} \quad (4.3.10)$$

となる。

式(4.3.2)に式(4.3.10)を代入すると、Cauchy 応力の Jaumann 速度と全変形速度テンソルの関係式より、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{\nabla} &= \mathbf{c}_{\text{el}}^{\sigma} : (\mathbf{d} - \dot{\lambda} \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{c}_{\text{el}}^{\sigma} : \left(\mathbf{d} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{c}_{\text{el}}^{\sigma} : \mathbf{d}}{-\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} : \mathbf{h} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{c}_{\text{el}}^{\sigma} : \mathbf{r}} \mathbf{r} \right) = \mathbf{c}_{\text{el}}^{\sigma} : \mathbf{d} \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

が得られる。ここで、4 階のテンソル $\mathbf{c}_{\text{el}}^{\sigma}$ は亜弾塑性接線係数である。さらに、式(4.3.11)を整理すると、

$$\mathbf{c}_{\text{el}}^{\sigma} = \mathbf{c}_{\text{el}}^{\sigma} - \frac{(\mathbf{c}_{\text{el}}^{\sigma} : \mathbf{r}) \otimes (\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{c}_{\text{el}}^{\sigma})}{-\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} : \mathbf{h} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{c}_{\text{el}}^{\sigma} : \mathbf{r}} \quad (4.3.12)$$

となる。

ここで得られた弾塑性構成式は Updated Lagrange 法の仮想仕事式(3.2.73)に代入すれば、有限要素法定式化は完成される。まず、Tuesdell 応力速度 $\dot{\mathbf{S}}_{\text{n}}$ と $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla}$ の関係は式(2.2.56)および式(2.2.62)から得られる

$$\dot{\mathbf{S}} = \boldsymbol{\sigma}^{\nabla} - \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} + (\text{trd}) \boldsymbol{\sigma} \quad (4.3.13)$$

しかし、 $(\text{trd}) \boldsymbol{\sigma}$ の存在より、この式は(3.2.45)に代入し、得られる要素剛性マトリクスは非対称になり、計算コストがかかることになる。そこで、塑性変形における非圧縮性($\text{trd}^p = 0$)と微小弾性ひずみの仮定からこの項は無視し得る程度と考えられるので、(4.3.13)を以下のように変換する。

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{c}_{\text{el}}^{\sigma} : \mathbf{d} - \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \quad (4.3.14)$$

一方、ダイレイタンス材料や浸透性のある塑性材料に対する適用においては、無視できないほど大きなダイレイタンス(体積変化)が塑性変形に伴って発生し、 $J \approx 1$ の仮定が成立しなくなる。このような弾塑性材の解析は Advance/FrontSTR の今後の課程としている。

4.3.2. 移動硬化則への拡張

サイクリックな荷重を考える上で、等方性硬化モデルでは、金属材料の応力・ひずみ挙動を表現できない。例えば、図 4.3.1 節で示したサイクリックな塑性材料は Bauschinger 効果として知られた挙動を示す。これは圧縮時の降伏ストレッチが引張り時の初期降伏状態に関連して減少する挙動である。これは降伏面の中心が塑性流れの方向に移動するものと考えている。

図 4.3.1(b)では多軸系での応力状態を示している。円形の降伏面の拡張(伸び縮み)を考えることを等方硬化と呼び、降伏面中心の移動を考えることを移動効果と呼ぶこととする。移動硬化モデルは、通常

の塑性モデルの他に内部変数として背応力 (back stress) テンソル α を用い、背応力 α は降伏面の中心を指し、その背応力の変化は降伏面中心の移動を記述する。

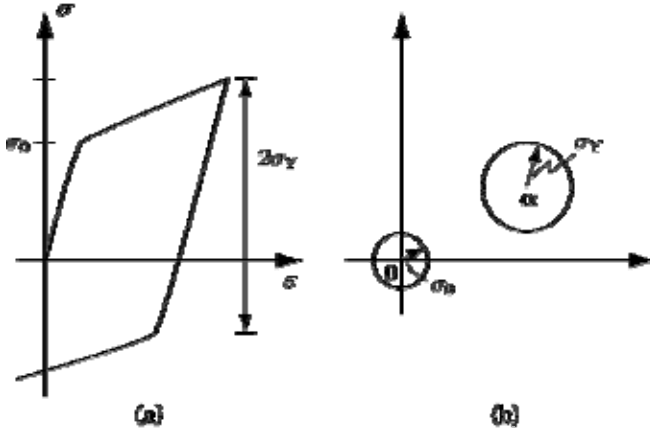


図 4.3.1 等方性材料の移動硬化則の概念図

(a) Bauschinger 効果 (b) 降伏面の移動と拡大

背応力が存在するとき、式(4.3.3)は以下のように書き換える。

$$d^p = \dot{\lambda} \mathbf{r}(\Sigma, \mathbf{q}), \quad \Sigma = \tau - \alpha \quad (4.3.15)$$

$$\alpha^{vj} = \frac{2}{3} \kappa d^p = \frac{2}{3} \kappa \dot{\lambda} \mathbf{r} \quad (4.3.16)$$

ここで、 κ は移動硬化係数である。このとき、適合条件から求めた塑性速度パラメータは

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \Sigma} : c_{el}^{vj} : d}{-\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{h} + \frac{\partial f}{\partial \Sigma} : \kappa \mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial \Sigma} : c_{el}^{vj} : \mathbf{r}} \quad (4.3.17)$$

となる。応力速度 - 全変形速度関係

$$\tau^{vj} = c^{vj} : d \quad (4.3.18)$$

であり、連続な弾塑性接線係数は

$$c^{vj} = c_{el}^{vj} - \frac{(c_{el}^{vj} : \mathbf{r}) \otimes (\frac{\partial f}{\partial \Sigma} : c_{el}^{vj})}{-\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{h} + \frac{\partial f}{\partial \Sigma} : \kappa \mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial \Sigma} : c_{el}^{vj} : \mathbf{r}} \quad (4.3.19)$$

となる。

4.3.3. 応力更新アルゴリズム

(1) Cauchy 応力の更新計算

変形増分量が分かると、式(4.3.11)から Cauchy 応力の Jaumman 増分を計算することができる。これから Cauchy 応力の物質増分を計算し、増分後の Cauchy 応力を計算する。

Cauchy 応力の Jaumman 速度と物質速度の関係は式(2.2.56)に示している。この式からスピテンソル \mathbf{w} を利用し、Cauchy 応力の物質増分を計算できるが、スピテンソル \mathbf{w} は増分量の線形関数ではなく、その増分量が大きくなるとその計算誤差が大きい。本ソフトウェアでは、相対的に計算誤差の小さい Hughes-Winget 回転マトリクスを用い、Cauchy 応力の物質増分の計算を行っている。

Hughes-Winget アルゴリズムは有限変形を有する速度形の構成式を以下のように計算する。

$$\sigma_{n+1} = \hat{\sigma}_n + \Delta \sigma, \quad \hat{\sigma}_n = \mathbf{R}^T \sigma_n \mathbf{R} \quad (4.3.20)$$

$$\alpha_{n+1} = \hat{\alpha}_n + \Delta \alpha, \quad \hat{\alpha}_n = \mathbf{R}^T \alpha_n \mathbf{R} \quad (4.3.21)$$

ここでは α は背応力であり、テンソル \mathbf{R} は以下のような中央積分法を用い計算する

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{w} \right)^{-1} \Delta \mathbf{w}$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_{n+\frac{1}{2}}} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_{n+\frac{1}{2}}} \right)^T \right], \quad \mathbf{x}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+1}) \quad (4.3.22)$$

また応力およびひずみ増分は以下を用い計算する。

$$\Delta \sigma = c^{vj} : \Delta \epsilon, \quad \Delta \epsilon = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_{n+\frac{1}{2}}} + \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_{n+\frac{1}{2}}} \right)^T \right] \quad (4.3.23)$$

(2) 後退型 Euler 積分 (radial return 法)

式(4.3.23)に示した応力増分計算式 $\Delta \sigma = c^{vj} : \Delta \epsilon$ は前進型 Euler 積分法であり、これの用いアップデ

ートされた応力や内部変数は次ステップでの降伏条件を満足せず、つまり、 $f_{n+1} = f(\sigma_{n+1}, q_{n+1}) \neq 0$ である。速度依存型塑性材料に対してこの方法を用いることは、近年の数値解析分野の主流から外れつつある。

前述の方法に代わるものとして、時間ステップの最後に降伏面から解が飛び出すことを回避する方法であり、 $f_{n+1} = 0$ である。このような方法は radial return 法と呼ばれ、解の精度が良いため、近年の有限要素法においては積極的に使用されている。

後退型 Euler 積分において塑性ひずみ増分と内部変数の増分は、現ステップ内を繰り返し計算した際の最後の状態において降伏条件が $f = 0$ となっていることが前提条件にある。つまり、応力・ひずみなどの積分方法は、

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n + \Delta\epsilon \quad (4.3.24)$$

$$\epsilon_{n+1}^p = \epsilon_n^p + \Delta\lambda_{n+1} \mathbf{r}_{n+1} \quad (4.3.25)$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \Delta\lambda_{n+1} \mathbf{h}_{n+1} \quad (4.3.26)$$

$$\sigma_{n+1} = \mathbf{c} : (\epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^p) \quad (4.3.27)$$

$$f_{n+1} = f(\sigma_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) = 0 \quad (4.3.28)$$

とする。ここで、時刻 n における応力・ひずみのセットを $(\epsilon_n, \epsilon_n^p, \mathbf{q}_n)$ で与えている。式(4.3.24)～式(4.3.28)では、時刻 $n+1$ におけるひずみ等を $(\epsilon_{n+1}, \epsilon_{n+1}^p, \mathbf{q}_{n+1})$ としている。つまり、前時間ステップにおける収束値に対する更新を行う。

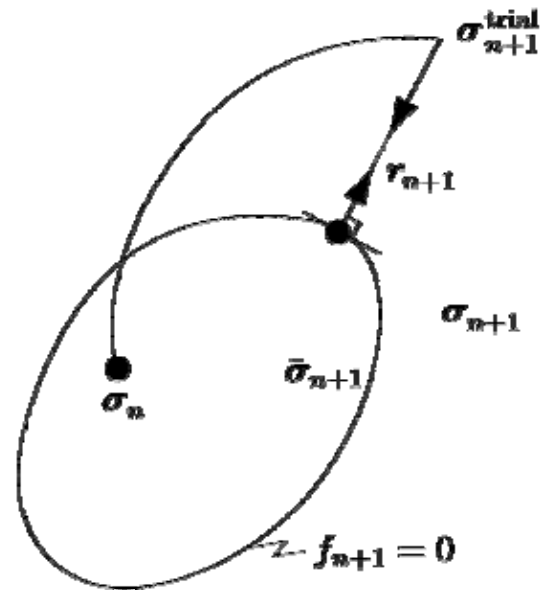


図 4.3.2 関連流れ則における return mapping の概念図

このアルゴリズムにおける幾何学的な解釈を以下に示す。初めに式(4.3.25)に対して塑性ひずみ増分は、

$$\Delta\epsilon_{n+1}^p \equiv \epsilon_{n+1}^p - \epsilon_n^p = \Delta\lambda_{n+1} \mathbf{r}_{n+1} \quad (4.3.29)$$

で与えられるものとする。式(4.3.27)は、

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \mathbf{c} : (\epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^p - \Delta\epsilon_{n+1}^p) \\ &= \mathbf{c} : (\epsilon_n + \Delta\epsilon - \epsilon_n^p - \Delta\epsilon_{n+1}^p) \\ &= \mathbf{c} : (\epsilon_n - \epsilon_n^p) + \mathbf{c} : \Delta\epsilon - \mathbf{c} : \Delta\epsilon_{n+1}^p \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

$$= (\sigma_n + \mathbf{c} : \Delta\epsilon) - \mathbf{c} : \Delta\epsilon_{n+1}^p$$

$$= \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \mathbf{c} : \Delta\epsilon_{n+1}^p$$

$$= \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\lambda_{n+1} \mathbf{c} : \mathbf{r}_{n+1}$$

となる。ここで、 $\sigma_{n+1}^{\text{trial}} = \sigma_n + \mathbf{c} : \Delta\epsilon$ は弾性予測子（elastic predictor）の試行応力（trial stress）であり、 $-\Delta\lambda_{n+1} \mathbf{c} : \mathbf{r}_{n+1}$ は plastic corrector である。Plastic corrector は図で示すように、降伏面を飛び出している試行応力 $\sigma_{n+1}^{\text{trial}}$ （つまり、 $f(\sigma_{n+1}^{\text{trial}}) \neq 0$ ）を塑性流れ方向を用いて適切な降伏面上に試行応

力を導くために用いられる。Elastic predictor は全ひずみ増分から得られ、plastic corrector は塑性パラメータの増分 $\Delta\lambda_{n+1}$ から得られる。つまり、elastic predictor を用いているときには、塑性ひずみと内部変数は固定されており、plastic corrector を用いているときには、全ひずみが固定されている。以上のことから、plastic corrector を用いている場合の応力増分は、

$$\Delta\sigma_{n+1} = -c : \Delta\epsilon_{n+1}^p = -\Delta\lambda_{n+1} c : r_{n+1} \quad (4.3.31)$$

となる。

上記 closet point projection の概念に基づいた降伏面に引き戻すための plastic corrector は式(4.3.24)～式(4.3.28)で示される非線形代数方程式の解は Newton の反復解法を行うことで求めることができる。Plastic corrector に関するアルゴリズムでは、全ひずみは一定であり、非線形な代数方程式の線形化は塑性パラメータの増分 $\Delta\lambda$ に関して行われる。そのため、 $\Delta\lambda^{(0)}$ を関数とする線形化された式 $g(\Delta\lambda) = 0$ を目的関数とする Newton の反復解法を行うこととなる。反復回数が k 回目のときは、

$$g^{(k)} + \left(\frac{dg}{d\Delta\lambda} \right)^{(k)} \delta\lambda^{(k)} = 0, \quad \Delta\lambda^{(k+1)} = \Delta\lambda^{(k)} + \delta\lambda^{(k)} \quad (4.3.32)$$

となる。ここで、 $\delta\lambda^{(k)}$ は反復回数 k 回目における $\Delta\lambda$ の増分量を意味する。

塑性状態の更新と降伏条件を前述した式(4.3.32)に対して適用すると、

$$a = -\epsilon^p + \epsilon_n^p + \Delta\lambda r = 0 \quad (4.3.33)$$

$$b = -q + q_n + \Delta\lambda h = 0 \quad (4.3.34)$$

$$f = f(\sigma, q) = 0 \quad (4.3.35)$$

となり、これらの式に対して $\Delta\epsilon^p^{(k)} = -c^{-1} : \Delta\sigma^{(k)}$ を用いて線形化すると、

$$a^{(k)} + c^{-1} : \Delta\sigma^{(k)} + \Delta\lambda^{(k)} \Delta r^{(k)} + \delta\lambda^{(k)} r^{(k)} = 0 \quad (4.3.36)$$

$$b^{(k)} - \Delta q^{(k)} + \Delta\lambda^{(k)} \Delta h^{(k)} + \delta\lambda^{(k)} h^{(k)} = 0 \quad (4.3.37)$$

$$f^{(k)} + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^{(k)} : \Delta\sigma^{(k)} + \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right)^{(k)} \cdot \Delta q^{(k)} = 0 \quad (4.3.38)$$

となる。ここで、

$$\Delta r^{(k)} = \left(\frac{\partial r}{\partial \sigma} \right)^{(k)} : \Delta\sigma^{(k)} + \left(\frac{\partial r}{\partial q} \right)^{(k)} \cdot \Delta q^{(k)} \quad (4.3.39)$$

$$\Delta h^{(k)} = \left(\frac{\partial h}{\partial \sigma} \right)^{(k)} : \Delta\sigma^{(k)} + \left(\frac{\partial h}{\partial q} \right)^{(k)} \cdot \Delta q^{(k)} \quad (4.3.40)$$

となる。式(4.3.36)と式(4.3.37)を式(4.3.39)と式(4.3.40)に代入すると、以下に示すマトリックス形式の方程式が得られる。

$$[A^{(k)}]^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta\sigma^{(k)} \\ \Delta q^{(k)} \end{Bmatrix} = -\{\tilde{a}^{(k)}\} - \delta\lambda^{(k)} \{\tilde{r}^{(k)}\} \quad (4.3.41)$$

ここで、

$$[A^{(k)}]^{-1} = \begin{bmatrix} c^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial r}{\partial \sigma} & \Delta r \frac{\partial r}{\partial q} \\ \Delta\lambda \frac{\partial h}{\partial \sigma} & -I + \Delta\lambda \frac{\partial h}{\partial q} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (4.3.42)$$

$$\{\tilde{a}^{(k)}\} = \begin{Bmatrix} a^{(k)} \\ b^{(k)} \end{Bmatrix}, \quad \{\tilde{r}^{(k)}\} = \begin{Bmatrix} r^{(k)} \\ h^{(k)} \end{Bmatrix}$$

である。応力増分と内部変数増分に対する解は、

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma^{(k)} \\ \Delta q^{(k)} \end{Bmatrix} = -[A^{(k)}] \{\tilde{a}^{(k)}\} - \delta\lambda^{(k)} [A^{(k)}] \{\tilde{r}^{(k)}\} \quad (4.3.43)$$

となる。式(4.3.43)から $\delta\lambda^{(k)}$ の解は、

$$\delta\lambda^{(k)} = \frac{f^{(k)} - \partial f^{(k)} A^{(k)} \tilde{a}^{(k)}}{\partial f^{(k)} A^{(k)} \tilde{r}^{(k)}} \quad (4.3.44)$$

となる。ここで、 $\partial f = [\partial f / \partial \sigma \quad \partial f / \partial q]$ である。

以上のことから塑性ひずみ、内部変数および塑性パラメータの更新は、

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p(k+1) = \boldsymbol{\varepsilon}^p(k) + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p(k) = \boldsymbol{\varepsilon}^p(k) - \boldsymbol{c}^{-1} : \Delta \boldsymbol{\sigma}^{(k)} \quad (4.3.45)$$

$$\mathbf{q}^{(k+1)} = \mathbf{q}^{(k)} + \Delta \mathbf{q}^{(k)} \quad (4.3.46)$$

$$\Delta \lambda^{(k+1)} = \Delta \lambda^{(k)} + \delta \lambda^{(k)} \quad (4.3.47)$$

となる。そして、更新された降伏面上に十分な収束精度を保持した状態の応力状態となるまで、Newton の反復法を繰り返す。

4.3.4. Consistent 接線係数

陰解法においてできる限り正確に近似された接線を求めることの必要性は、降伏状態の塑性挙動が極端に大きくなるようなときに効果があり、弾塑性接線係数が擬似的な負荷もしくは除荷状態に陥ることを回避できることで、安定した解を求めることができる点にある。ここでは、弾塑性接線係数として用いることのできる積分アルゴリズムの対称な線形化に基づく consistent 接線係数について説明する。この議論では、前述した後退型 Euler 積分によるアルゴリズムを前提条件として成り立っていることに注意が必要である。

後退型 Euler 積分における更新手続きにおいて consistent 接線係数は、

$$\boldsymbol{c}^{\text{alg}} = \left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right)_{n+1} \quad (4.3.48)$$

で定義される。この consistent 接線係数で用いている表記方法は、式(4.3.24)～式(4.3.28)における増分形式に従っており、

$$d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{c} : (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (4.3.49)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d(\Delta \lambda) \mathbf{r} + \Delta \lambda d\mathbf{r} \quad (4.3.50)$$

$$d\mathbf{q} = d(\Delta \lambda) \mathbf{h} + \Delta \lambda d\mathbf{h} \quad (4.3.51)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} = 0 \quad (4.3.52)$$

となる。ここで、

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q}, \quad d\mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} \quad (4.3.53)$$

である。式(4.3.49)に式(4.3.50)を代入すると、 $d\boldsymbol{\sigma}$ と $d\mathbf{q}$ に対する解は、

$$\begin{Bmatrix} d\boldsymbol{\sigma} \\ d\mathbf{q} \end{Bmatrix} = [\mathbf{A}] \begin{Bmatrix} d\boldsymbol{\varepsilon} \\ 0 \end{Bmatrix} - d(\Delta \lambda) \mathbf{A} : \tilde{\mathbf{r}} \quad (4.3.54)$$

となる。ここで、

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^{-1} + \Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \\ \Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & -\mathbf{I} + \Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.3.55)$$

である。さらに、 $\partial f = [\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma} \quad \partial f / \partial \mathbf{q}]$ とするとき、適合条件の増分式(4.3.52)を式(4.3.54)に代入することで、 $d(\Delta \lambda)$ の解は

$$d\Delta \lambda = \frac{-\partial f : \mathbf{A} : \begin{Bmatrix} d\boldsymbol{\varepsilon} \\ 0 \end{Bmatrix}}{\partial f : \mathbf{A} : \tilde{\mathbf{r}}} \quad (4.3.56)$$

で与えられる。この結果、応力や内部変数の増分にに関する consistent 接線係数は、式(4.3.54)より、

$$\begin{Bmatrix} d\boldsymbol{\sigma} \\ d\mathbf{q} \end{Bmatrix} = \left[\mathbf{A} - \frac{(\mathbf{A} : \mathbf{r}) \otimes (\partial f : \mathbf{A})}{\partial f : \mathbf{A} : \tilde{\mathbf{r}}} \right] : \begin{Bmatrix} d\boldsymbol{\varepsilon} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.3.57)$$

となる。

関連流れ則、つまり塑性流れの方向と塑性係数が同一のポテンシャル（つまり、 $\mathbf{r} = \partial \Psi / \partial \boldsymbol{\sigma}$ かつ $\mathbf{h} = \partial \Psi / \partial \mathbf{q}$ ）を採用した場合、 \mathbf{A} は

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \left(\boldsymbol{c}^{-1} + \Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} & 0 \\ 0 & \left(-\mathbf{I} + \Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}} & 0 \\ 0 & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \quad (4.3.58)$$

式(4.3.57)を用いて consistent 接線係数を求めると、

$$\mathbf{c}^{\text{alg}} = \left(\tilde{\mathbf{c}} - \frac{(\tilde{\mathbf{c}} : \mathbf{r}) \otimes \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\mathbf{c}} \right)}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\mathbf{c}} : \mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{h}} \right) \quad (4.3.59)$$

となる。

4.3.5. 降伏関数

この節では、Advance/FrontSTR で採用した降伏関数をまとめる。

(1) Von-Mises 降伏モデル

von-Mises 規準は偏差不変量から成る J_2 応力がクリティカルな値に達したときに塑性降伏したものととして考える。この条件は数学的には次式で表される。

$$J_2 = R(q) \quad (4.3.60)$$

ここで、 R はクリティカルな値であり、内部硬化変数 q に関する関数である。ここで、静水圧力応力が von-Mises 規準の降伏条件に影響を与えるのではなく、偏差応力のみによって塑性降伏条件が決まることに注意しなければならない。つまり、von-Mises 規準は圧力非依存性の材料である。

背応力 α の存在を考慮し、von-Mises 塑性体の降伏関数は

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha, \bar{\varepsilon}_p) = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_y \leq 0; \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} (\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} - \alpha) : (\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} - \alpha)}; \quad \bar{\sigma}_y = f(\bar{\varepsilon}_p) \quad (4.3.61)$$

になる。ここでは、 $\bar{\sigma}$ は mises 有効応力と呼ぶ。 $\bar{\sigma}_y$ は降伏応力、 $\bar{\sigma}_y^0$ は初期降伏応力、 $\bar{\varepsilon}_p$ は相当塑性ひずみである。 $\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}$ は偏差応力であり、Cauchy 応力の等方応力を p とすると、偏差応力は、

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} = \boldsymbol{\sigma} - p \mathbf{I} \quad (4.3.62)$$

である。また、 $\bar{\sigma}_y = f(\bar{\varepsilon}_p)$ は材料のひずみ硬化を示しており、Advance/FrontSTR は線形硬化式、多

直線近似硬化式及び以下の Swift 式

$$\bar{\sigma} = k(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon})^n \quad (4.3.63)$$

および Ramberg-Osgood の式

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_0 \left(\frac{\sigma}{D} \right)^n \quad (4.3.64)$$

から塑性硬化係数を求める。

また、背応力 α の発展方程式は以下になる。

$$\alpha^{\text{vj}} = \frac{2}{3} \kappa \varepsilon^p \quad (4.3.65)$$

ここで、 κ は移動硬化係数である。

上記の降伏関数を用い、材料が弾性挙動を示す場合は $f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha, \bar{\varepsilon}_p) < 0$ となり、材料が弾塑性挙動を示す場合は $f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha, \bar{\varepsilon}_p) = 0$ となる。弾塑性状態での von-Mises の等価応力が現在の降伏応力 $\bar{\sigma}_y$ に等しくなっている。

(2) Mohr-Coulomb 降伏モデル

砂や岩のような摩擦性材料やダイレイタンシー効果に対する考慮が必要な材料では、 J_2 流れ則から成る材料モデルでは現象を十分に表現できない。そのため、摩擦性挙動を示す降伏関数が必要になる。そこで、圧力依存性のない Von-Mises 塑性体と圧力依存性のある塑性体を比較しながら説明を行う。さらに、このような摩擦性材料が関連流れ則では必ずしも挙動を近似できるものではないことを示す。図 4.3.3 では摩擦挙動を示すブロックを考えている。このとき、法線方向の荷重を N とし、接線方向の荷重を Q とする。静的な摩擦係数 μ を持つ粗い表面上でブロックが静止している。Coulomb 則が保持されているとすると、最大摩擦抵抗は $F_{\text{max}} = \mu N$ で与えられる。そして、すべりが発生したときに、降伏条件を満足したものと考えると、

$$f = Q - \mu N = 0 \quad (4.3.66)$$

となる。降伏面(4.3.66)を図 4.3.3 で示す。このとき、すべり（塑性流れ）の方向は水平方向（ Q の方向）であり、降伏面の法線方向ではない。これはこの塑

性挙動が非関連流れ則の性質を持っていることを示している。Mohr-Coulomb 規準はこのような挙動に対する多軸の応力 - ひずみ関係を一般化したものである。

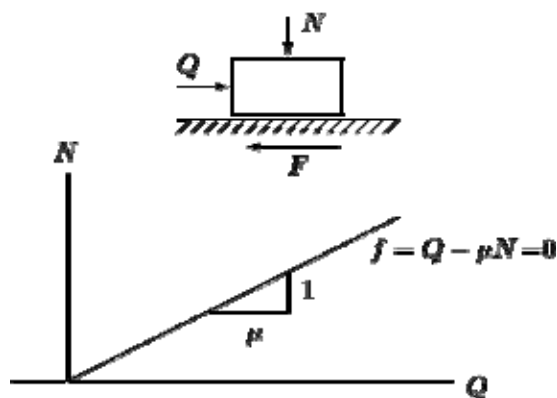


図 4.3.3 摩擦すべりに対する降伏面

この Mohr-Coulomb 規準は、せん断応力と mean normal 応力で示される応力状態が任意平面に到達した時点で、材料が降伏状態にあることを基本概念とした降伏規準である。このときの規準は、

$$\tau = c - \mu \sigma \quad (4.3.67)$$

という状態にある。ここで、 τ はせん断応力であり、 σ は平面上の法線方向の応力、 c は粘着力である。内部摩擦角 ϕ は $\mu = \tan \phi$ で定義される。これを主応力表示すると、

$$f(\tau) = \sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0 \quad (4.3.68)$$

となる。この式は降伏状態あるいは破壊が最大主応力 σ_1 と最小主応力 σ_3 で規定され、中間主応力 σ_2 がそれらに参与しないことを意味する。この式を応力不変量 I_1, J_2, J_3 で表記する。ただし、 J_3 に関し Lode 角を用いる。

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}} \right) \quad (4.3.69)$$

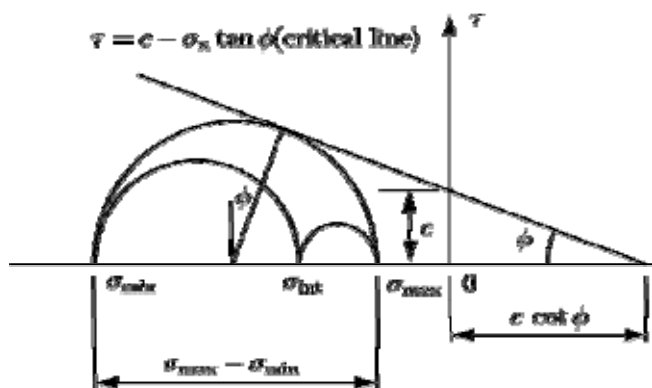
とする。すると、応力不変量表示の Mohr-Coulomb 式が、

$$f(\tau) = J_1 \sin \phi + \sqrt{J_2} \left(\cos \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right) - c \cos \phi = 0$$

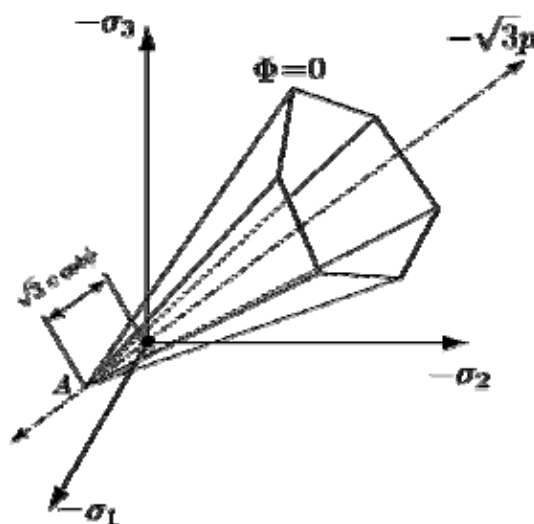
(4.3.70)

となる。このとき、 $0 < \theta < \pi/3$ である。

式(4.3.68)と式(4.3.70)は 平面上で直線となる。主応力の大きさの組み合わせを変化させると、Mohr-Coulomb 式は 平面上で図 4.3.4(b)に示すように 6 角形となる。



(a)



(b)

図 4.3.4 Mohr-Coulomb 降伏モデル

(a) Mohr-Coulomb モデルの挙動

(b) Mohr-Coulomb 降伏面

(3) Drucker-Prager 降伏モデル

Drucker-Prager 降伏規準では、圧力の影響を表すために、von-Mises 降伏規準に修正を加えて、

$$f = \bar{\sigma} + \tan \beta \sigma : I - Y = 0 \quad (4.3.71)$$

とした。これは滑らかな円すい形をした降伏面にな

っている。ここで、式(4.3.71)の中の $\bar{\sigma}$ は式(4.3.61)に示される von-Mises の有効応力(ただし、背応力 $\alpha=0$)

$$\bar{\sigma} = \left[\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.3.72)$$

である。 β と Y はそれぞれ摩擦角と粘着力であり、Mohr-Coulomb 材の摩擦角 ϕ と粘着力 c から以下のように近似的換算できる。

$$\tan\beta = \frac{2 \sin \phi}{(3 \pm \sin \phi)}, \quad Y = \frac{6 c \cos \phi}{(3 \pm \sin \phi)} \quad (4.3.73)$$

このとき、Drucker-Prager 降伏面は Mohr-Coulomb 降伏面の内側面もしくは外側面を通る。ここで、式(4.3.73)中の符号に関して、内側面の場合は符号が正、外側面の場合は符号が負となる。

弾性応答には Cauchy 応力の Jaumann 速度を基にした歪弾性構成式がよく用いられる。また、関連型と非関連型両方の定式化ができる。関連流れ則では $d^p = \dot{\lambda} \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, q)$ であり、

$$\mathbf{r} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2\bar{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} - \tan\beta \mathbf{I}$$

となる。しかし、関連流れ則を採用するとき、体積の膨張はしばしば過大評価する。そのとき、以下の非関連流れ則を採用し、この問題を回避する。

$$\mathbf{r} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2\bar{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} - \tan\bar{\beta} \mathbf{I}, \quad \psi = \bar{\sigma} + \tan\bar{\beta} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I} \quad (4.3.74)$$

ここでは $\bar{\beta}$ は膨張角と呼ばれる。

5. 要素ライブラリ

5.1. 有限要素による空間離散方法

有限要素法解析では、連続空間を離散化し、有限個の要素で表す。

$$\Omega \approx \Omega^h = \bigcup_{i=1}^{n_e} \Omega_e \quad (5.1.1)$$

ここでは、 n_e は要素の数、上付き添え字 h は離散化された領域を表す。

5.1.1. 有限要素補間

本ソフトウェアは変位型有限要素法を使用している。その特徴は、連続体の任意一点の座標および変位場は有限要素ごとに要素を構成する節点の変位を用い次式のように内挿する。

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \mathbf{M}^i(\mathbf{r}) \mathbf{x}^i = \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{X} \quad (5.1.2)$$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m \mathbf{N}^i(\mathbf{r}) \mathbf{u}^i = \mathbf{N}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{U} \quad (5.1.3)$$

ここで、 \mathbf{M} と \mathbf{N} はそれぞれ形状 (補間) 関数と変位 (補間) 関数と呼び、 m は要素節点数である。特に \mathbf{M} と \mathbf{N} は同じ関数で与える場合、その要素をアイソパラメトリック要素と呼ぶ。

本ソフトウェアでは、すべての要素がアイソパラメトリック要素であり、上記の 2 つの補間関数を形状関数と呼ぶ。

ここで形状関数 \mathbf{N} は \mathbf{r} について微分可能な連続関数とする。 \mathbf{r} は一般的には自然座標と呼ばれている。式(5.1.2)は \mathbf{r} から \mathbf{x} への写像を表している。一方、微分のチェーンルールを用いて

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{J}^{-1} \quad (5.1.4)$$

へ変形し、式(5.1.3)を用い、変位勾配は以下のように書き換えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{N}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{N}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{U} \quad (5.1.5)$$

ここで、 \mathbf{r} から \mathbf{x} への写像におけるヤコビマトリクスを \mathbf{J} とした ($d\mathbf{x} = \mathbf{J} d\mathbf{r}$)。

式(5.1.5)を利用し、式(3.2.1)あるいは式(3.2.26)に示した変位 ひずみ関係は形状関数より表すこ

とができる。式(3.2.1)に示した微小変形ひずみは以下である。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) + \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \right\} = \sum_{i=0}^m \mathbf{B}^m \Delta \mathbf{u}^m = \mathbf{B} \Delta \mathbf{U} \quad (5.1.6)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{31}\} \quad (5.1.7)$$

$$\mathbf{u}^m = \{u_1^m \quad u_2^m \quad u_3^m\}^T \quad (5.1.8)$$

$$\mathbf{B}^m = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^m}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^m}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^m}{\partial X_3} \\ \frac{\partial N^m}{\partial X_2} & \frac{\partial N^m}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^m}{\partial X_3} & \frac{\partial N^m}{\partial X_2} \\ \frac{\partial N^m}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial N^m}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (5.1.9)$$

5.1.2. 数値積分

要素剛性マトリクス、要素質量マトリクス、節点力などを計算するたび、要素全域に対する積分を行う必要がある。このような積分は、一般的には複雑であるために解析的に行うことは困難であるため、特殊な場合を除いて何らかの数値的な手法(数値積分)が用いられる。

数値積分とは積分領域内に複数のサンプリング点を取り、次式によって積分を近似的に評価する方法である。

$$\int_{\Omega} f d\Omega = \sum_{i=1}^n \beta_i f(\mathbf{x}_i); \quad \mathbf{x}_i \in \Omega \quad (5.1.10)$$

ここで、 n はサンプリング点の総数であり、 β_i は重み係数である。

一方、面荷重、接触力などを計算するときも、要素面に対する積分を行う必要がある。

$$\int_{\Gamma} f d\Gamma = \int_{\Gamma} f \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} d\xi \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta} d\eta = \int_{\Gamma} f \mathbf{J}^* d\xi d\eta \quad (5.1.11)$$

ここで、

$$\mathbf{J}^* = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta} \quad (5.1.12)$$

である。 ξ と η は要素面の自然座標を表している。

以下では、本ソフトウェアで実装している要素およびその形状関数を紹介する。

5.2. ソリッド要素

5.2.1. 4 面体要素

4 面体要素は図 5.2.1 に示している自然座標を用い形状関数を構築する。4 面体 1 次要素の形状関数は以下である。

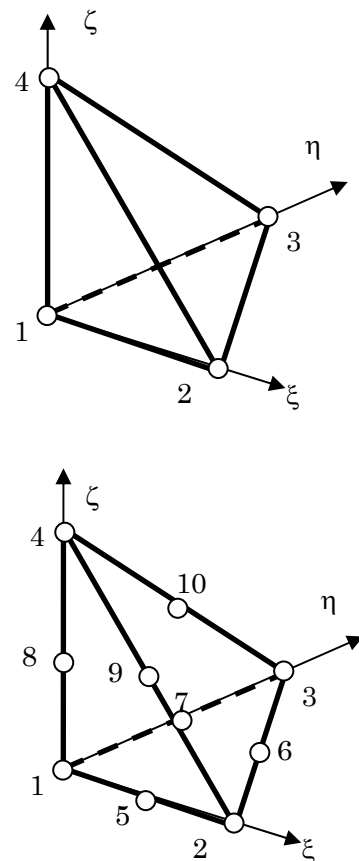


図 5.2.1 4 面体 1 次および 2 次要素

4 面体要素は図 5.2.1 に示している自然座標を用い形状関数を構築する。4 面体 1 次要素の形状関数は以下である。

$$N^1 = 1 - \xi - \eta - \zeta$$

$$N^2 = \xi \quad (5.2.1)$$

$$N^3 = \eta$$

$$N^4 = \zeta$$

4 面体 2 次要素の形状関数は以下である。

$$N^1 = (1 - \xi - \eta - \zeta)[2(1 - \xi - \eta - \zeta) - 1]$$

$$N^2 = \xi(2\xi - 1)$$

$$N^3 = \eta(2\eta - 1)$$

$$N^4 = \zeta(2\zeta - 1)$$

$$N^5 = 4(1 - \xi - \eta - \zeta)\xi \quad (5.2.2)$$

$$N^6 = 4\xi\eta$$

$$N^7 = 4(1 - \xi - \eta - \zeta)\eta$$

$$N^8 = 4(1 - \xi - \eta - \zeta)\zeta$$

$$N^9 = 4\xi\zeta$$

$$N^{10} = 4\eta\zeta$$

ただし、

$$0 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1 \quad \xi + \eta + \zeta \leq 1 \quad (5.2.3)$$

とした。

5.2.2. 5 面体（ピラミッド）要素

ピラミッド要素は図 5.2.2 に示している自然座標を用い形状関数を構築する。ピラミッド 1 次要素の形状関数は以下である。

$$N^1 = 0.125(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)$$

$$N^2 = 0.125(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)$$

$$N^3 = 0.125(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \quad (5.2.4)$$

$$N^4 = 0.125(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)$$

$$N^5 = 0.5(1 + \zeta)$$

ただし、

$$-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1 \quad \xi + \eta + \zeta \leq 1 \quad (5.2.5)$$

とした。

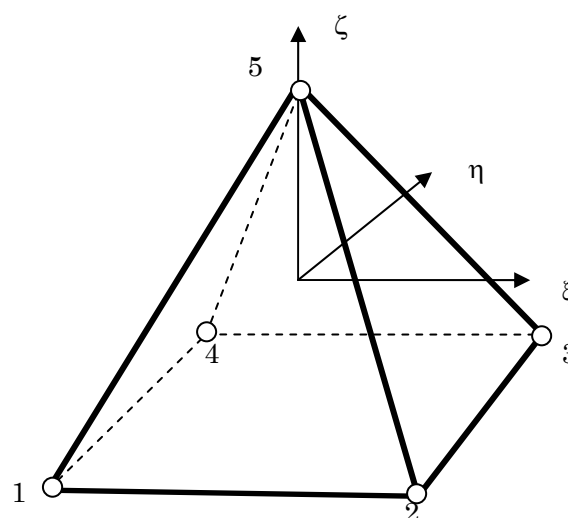


図 5.2.2 5 面体（ピラミッド）1 次要素

5.2.3. プリズム要素

プリズム要素は図 5.2.3 に示している自然座標を

用い形状関数を構築する。プリズム 1 次要素の形状関数は以下である。

$$N^1 = (1 - \xi - \eta)(1 - \zeta)/2$$

$$N^2 = \xi(1 - \zeta)/2$$

$$N^3 = \eta(1 - \zeta)/2$$

$$N^4 = (1 - \xi - \eta)(1 + \zeta)/2$$

$$N^5 = \xi(1 + \zeta)/2$$

$$N^6 = \eta(1 + \zeta)/2$$

(5.2.6)

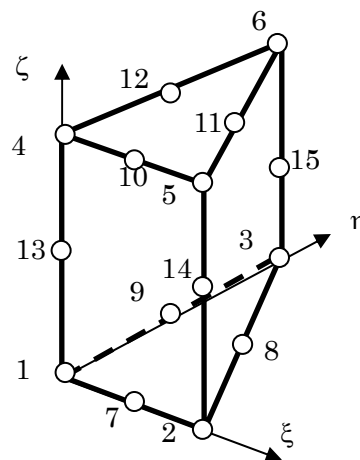
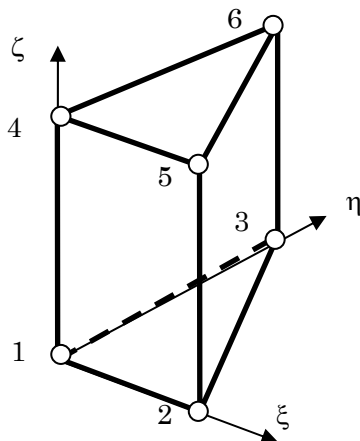


図 5.2.3 プリズム 1 次要素および 2 次要素

プリズム 2 次要素の形状関数は以下である。

$$N^1 = -(1 - \xi - \eta)(1 - \zeta)[2\xi + 2\eta + \zeta]/2$$

$$N^2 = \xi(1 - \zeta)(2\xi - \zeta - 2)/2$$

$$N^3 = \eta(1 - \zeta)(2\eta - \zeta - 2)/2$$

$$N^4 = -(1 - \xi - \eta)(1 + \zeta)[2\xi + 2\eta - \zeta]/2$$

$$N^5 = \xi(1 + \zeta)(2\xi + \zeta - 2)/2$$

$$N^6 = \eta(1 + \zeta)(2\eta + \zeta - 2)/2$$

$$N^7 = 2\xi(1 - \xi - \eta)(1 - \zeta)$$

$$N^8 = 2\xi\eta(1 - \zeta) \quad (5.2.7)$$

$$N^9 = 2\eta(1 - \xi - \eta)(1 - \zeta)$$

$$N^{10} = 2\xi(1 - \xi - \eta)(1 + \zeta)$$

$$N^{11} = 2\xi\eta(1 + \zeta)$$

$$N^{12} = 2\eta(1 - \xi - \eta)(1 + \zeta)$$

$$N^{13} = (1 - \xi - \eta)(1 - \zeta^2)$$

$$N^{14} = \xi(1 - \zeta^2)$$

$$N^{15} = \eta(1 - \zeta^2)$$

ただし、

$$0 \leq \xi, \eta \leq 1; \quad -1 \leq \zeta \leq 1 \quad (5.2.8)$$

とした。

5.2.4. 6 面体要素

(1) 一般的な取り扱い

6 面体要素は図 5.2.3 に示している自然座標を用い形状関数を構築する。6 面体 1 次要素の形状関数

は以下である。

$$N^1 = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)/8$$

$$N^2 = (1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)/8$$

$$N^3 = (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)/8$$

$$N^4 = (1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)/8$$

$$N^5 = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)/8$$

$$N^6 = (1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)/8$$

$$N^7 = (1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)/8$$

$$N^8 = (1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)/8$$

(5.2.9)

プリズム 2 次要素の形状関数は以下である。

$$N^1 = -(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)(2 + \xi + \eta + \zeta)/8$$

$$N^2 = -(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)(2 - \xi + \eta + \zeta)/8$$

$$N^3 = -(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)(2 - \xi - \eta + \zeta)/8$$

$$N^4 = -(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)(2 + \xi - \eta + \zeta)/8$$

$$N^5 = -(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)(2 + \xi + \eta - \zeta)/8$$

$$N^6 = -(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)(2 - \xi + \eta - \zeta)/8$$

$$N^7 = -(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)(2 - \xi - \eta - \zeta)/8$$

$$N^8 = -(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)(2 + \xi - \eta - \zeta)/8$$

$$N^9 = (1 - \xi)(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)/4$$

$$N^{10} = (1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \eta)(1 - \zeta)/4$$

$$N^{11} = (1 - \xi)(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)/4$$

$$N^{12} = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \eta)(1 - \zeta)/4$$

$$N^{13} = (1 - \xi)(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)/4$$

$$N^{14} = (1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \eta)(1 + \zeta)/4$$

$$N^{15} = (1 - \xi)(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)/4$$

$$N^{16} = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \eta)(1 + \zeta)/4$$

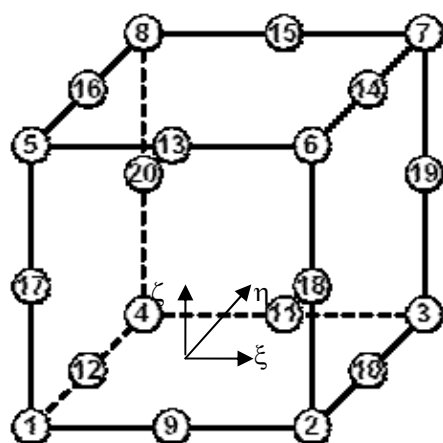
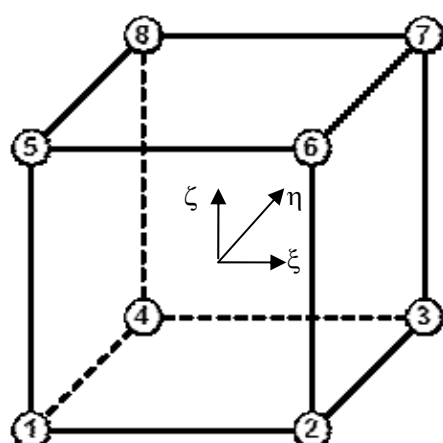


図 5.2.3 プリズム 1 次要素および 2 次要素

$$N^{17} = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)(1 + \zeta)/4$$

$$N^{18} = (1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)(1 + \zeta)/4$$

$$N^{19} = (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)(1 + \zeta)/4$$

$$N^{20} = (1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)(1 + \zeta)/4$$

(5.2.10)

ただし、

$$-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1 \quad \xi + \eta + \zeta \leq 1 \quad (5.2.11)$$

とした。

(2) 非適合要素

完全積分 6 面体 1 次要素は曲げ現象を対象とした解析を扱う場合では、極端に剛な応答が得られ、誤差が過大になるせん断ロッキング現象が起きる。その解決方法の 1 つは要素ごとに独立な自由度を増やし、ロッキングを回避する方法である。

非適合 6 面体 1 次要素[13]は式(5.1.3)に示した変位補間式を代わりに、以下の変位補間を行う

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^8 \mathbf{N}^i(\mathbf{r}) \mathbf{u}^i + \sum_{i=1}^3 \mathbf{P}^i(\mathbf{r}) \boldsymbol{\alpha}^i \quad (5.2.12)$$

ここで、右辺第 1 項の \mathbf{N}^i は式(5.2.9)に示した標準的な形状関数であり、右辺第 2 項の \mathbf{P}^i は式(5.2.9)で示される形状関数である。

$$\left. \begin{aligned} P^1 &= 1 - \xi^2 \\ P^2 &= 1 - \eta^2 \\ P^3 &= 1 - \zeta^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{incompatible modes}) \quad (5.2.13)$$

$\boldsymbol{\alpha}^i$ は(一般的な変位とは区別される)変位ベクトルである。ただし、ここでは非適合モードが要素内に発生する節点間の曲げモードを想定していることから、 $\boldsymbol{\alpha}^i$ は節点自由度の追加として扱われず、要素自由度に対する変位ベクトルとして扱う。

(3) 選択低減積分要素

完全積分 6 面体 1 次要素は非圧縮材料を扱う場合では、極端に剛な応答が得られ、誤差が過大になる体積ロッキング現象が起きる。その解決方法の 1 つは体積ひずみに関する項を 1 点で積分する方法であり、選択的低減積分[14]と呼ぶ。

完全積分 6 面体 1 次要素は式(5.1.6)に示したように各積分点のひずみを計算するが、選択低減積分要素はまずひずみの体積成分と偏差成分を分解する。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{B}^{\text{vol}} + (\mathbf{B} - \mathbf{B}^{\text{vol}})] \Delta \mathbf{U} = [\mathbf{B}^{\text{vol}} + \mathbf{B}^{\text{dev}}] \Delta \mathbf{U} \quad (5.2.14)$$

そして、この第 1 項目の \mathbf{B}^{vol} は要素の体積平均値で評価した $\bar{\mathbf{B}}^{\text{vol}}$ で置き換え、各積分点のひずみを計算する。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\bar{\mathbf{B}}^{\text{vol}} + \mathbf{B}^{\text{dev}}] \Delta \mathbf{U} \quad (5.2.15)$$

5.3. シェル要素

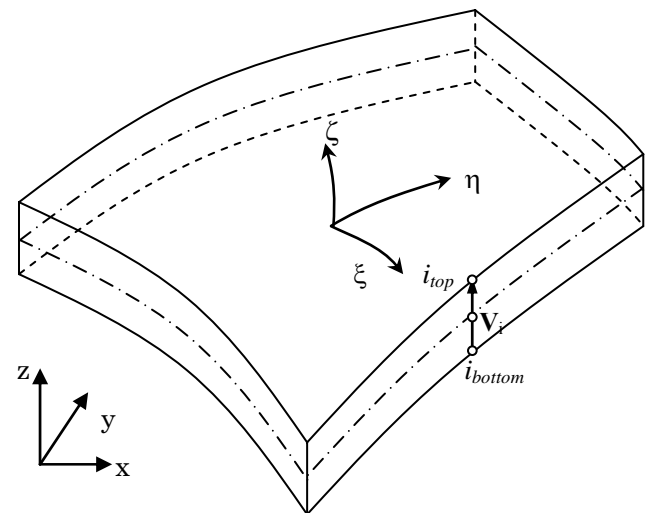


図 5.3.1 アイソパラメトリックシェル要素

5.3.1. アイソパラメトリックシェル要素

シェル要素は構造要素であり、薄肉構造物の解析に用いられる。本ソフトウェアはアイソパラメトリックシェル要素を使っている。アイソパラメトリックシェル要素は 3 次元ソリッド要素の厚み方向につぶすように作られているため縮退(degenerated)

要素とも呼ばれている。

図 5.3.1 はアイソパラメトリックシェル要素のモデル図を示す。図 5.3.1 より、シェルの中立面は自然座標系 ξ - η と表し、シェルの厚み方向の座標は ζ と表す。さらに、 ξ 、 η と ζ は要素内 -1 から 1 まで変化すると仮定すると、シェル要素内の任意一点の座標は

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum N_i(\xi, \eta) \left(\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \zeta \mathbf{V}_i \right) \quad (5.3.1)$$

で表せる。ここでは \mathbf{V}_i はシェルディレクターであり、その長さはシェルの厚さ t である。

時間ステップ n (時刻 t) から時間ステップ $n+1$ (時刻 $t' = t + \Delta t$) までの変位増分ベクトル \mathbf{u} は以下となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{x}' - \mathbf{x} &= \sum N_i(\xi, \eta) \left[(\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}_i) + \frac{t_i}{2} \zeta (\mathbf{V}'_i - \mathbf{V}_i) \right] \\ &= \sum N_i(\xi, \eta) \left[(\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}_i) + \frac{t_i}{2} \zeta (\mathbf{R}_i^{n+1} - \mathbf{I}) \mathbf{V}_i \right] \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

ここで、 \mathbf{I} は単位テンソル、 \mathbf{R}_i^{n+1} はディレクターベクトル \mathbf{V}_i に対する時間ステップ n から時間ステップ $n+1$ までの有限回転テンソルである。

シェルのディレクター \mathbf{V}_i の時間ステップ $n \sim n+1$ までの有限回転に関して、回転の間に回転軸は変化しないものと仮定する。このとき回転軸を表すベクトルを軸性ベクトル $\mathbf{n}^{n+1}\boldsymbol{\theta}$ とし、その大きさが有限回転角 ω を表すとする。

$$\mathbf{n}^{n+1}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{n}^{n+1}\theta_i \mathbf{e}_i; \text{ 軸性ベクトル} \quad (5.3.3)$$

$$\omega = |\mathbf{n}^{n+1}\boldsymbol{\theta}| : \text{有限回転角} \quad (5.3.4)$$

次に軸性ベクトルを用いて反対称マトリックスを定義する。

$$\mathbf{n}^{n+1}\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{n}^{n+1}\theta_3 & \mathbf{n}^{n+1}\theta_2 \\ \mathbf{n}^{n+1}\theta_3 & 0 & -\mathbf{n}^{n+1}\theta_1 \\ -\mathbf{n}^{n+1}\theta_2 & \mathbf{n}^{n+1}\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3.5)$$

上記において、 $\mathbf{n}^{n+1}\theta_i$ はディレクターベクトル $\mathbf{n}^{n+1}\boldsymbol{\theta}$ の第 i 成分であり、回転マトリックス \mathbf{R}_i^{n+1} により変形の都度、更新するものとする。有限回転は微小回転の集まりと考えれば、有限回転テンソルは以下のようにあらわすことができる。

$$\mathbf{R}_i^{n+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\mathbf{I} + \frac{1}{m} \mathbf{n}^{n+1}\boldsymbol{\Phi} \right)^m = \quad (5.3.6)$$

$$\mathbf{I} + \mathbf{n}^{n+1}\boldsymbol{\Phi} + \frac{1}{2!} (\mathbf{n}^{n+1}\boldsymbol{\Phi})^2 + \frac{1}{3!} (\mathbf{n}^{n+1}\boldsymbol{\Phi})^3 + \dots$$

式(5.3.6)を式(5.3.2)に代入すれば、変位ベクトルの離散形が得られる。特に、回転角は十分小さい場合では、以下の式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \sum N_i(\xi, \eta) \left(\begin{Bmatrix} U_{1i} \\ U_{2i} \\ U_{3i} \end{Bmatrix} + \frac{t_i}{2} \zeta \begin{bmatrix} 0 & V_{3i} & -V_{2i} \\ -V_{3i} & 0 & V_{1i} \\ V_{2i} & -V_{1i} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{1i} \\ \theta_{2i} \\ \theta_{3i} \end{Bmatrix} \right) \quad (5.3.7)$$

5.3.2. MITC シェル要素

シェル要素の大きさとシェルの厚さの比は大きくなると、Shear Locking する問題があることが知られている。この問題を回避できる MITC 要素が注目されている。

Shear Locking は実際によく使用される低次元要素に関して面外せん断ひずみエネルギーが過剰に評価されることより発生すると言われており、MITC 要素ではその対策として面外せん断ひずみ成分を取り去る方法がとられている。

その具体的方法として、まず、面内ひずみは 3 次元ソリッドと同様に変位の形状関数を微分して求める。次に面外ひずみについては、サンプリング点について面外ひずみを求めたのち、要素内任意点についてはサンプリング点を補間することにより求める。

また、有限回転の場合にも適用できるように、埋め込み座標系でのひずみ成分を用いる。埋め込み座標としては、アイソパラメトリック要素における自然座標系を用いる。

(1) MITC4 シェル要素

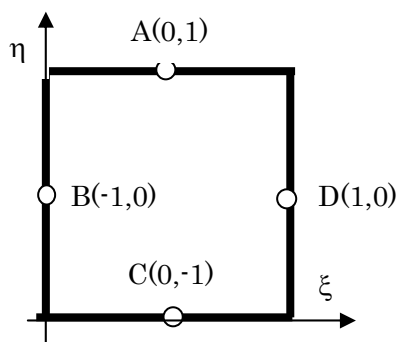


図 5.3.2 面外せん断ひずみのサンプリング点 (MITC4)

MITC4 シェル要素[15]では、面外ひずみの補間に用いるサンプリング点は図 5.3.2 に示す A,B,C,D の 4 点とする。このとき、面外ひずみの計算は下式に示す。

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(1+\eta)\varepsilon_{\xi\xi}^A + \frac{1}{2}(1-\eta)\varepsilon_{\xi\xi}^C \quad (5.3.8)$$

$$\varepsilon_{\eta\xi} = \frac{1}{2}(1+\xi)\varepsilon_{\eta\xi}^D + \frac{1}{2}(1-\xi)\varepsilon_{\eta\xi}^B$$

(2) MITC3 シェル要素

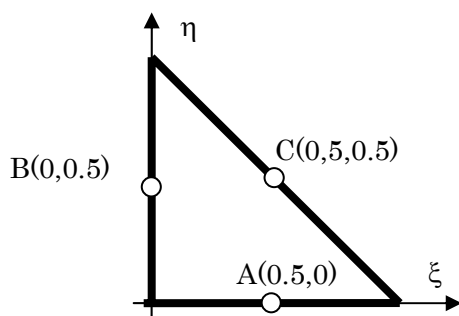


図 5.3.3 面外せん断ひずみのサンプリング点 (MITC3)

MITC3 シェル要素[16]では、面外ひずみの補間に用いるサンプリング点は図 5.3.3 に示す各辺の中央点をとっている。 ξ 、 η は要素内 0 から 1 まで変化すると仮定し、図 5.3.3 には各サンプリング点の自然座標を示している。このとき、面外ひずみの計算は下式に示す。

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \varepsilon_{\xi\xi}^A + c\eta \quad (5.3.9)$$

$$\varepsilon_{\eta\xi} = \varepsilon_{\eta\xi}^B - c\xi$$

$$c = \varepsilon_{\eta\xi}^B - \varepsilon_{\xi\xi}^A - \varepsilon_{\eta\xi}^C + \varepsilon_{\xi\xi}^C$$

6. 接触解析

接触問題は一種の境界条件に起因する非線形現象である。ここでは、接触問題が固有する特徴とその解法、特に有限要素法定式化を体系的に紹介するものである。ここでは、有限すべりによる接触非線形を注目し、接触の接線剛性マトリクスを得ることを主な目標とする。または、本ソフトウェアは微小すべり問題に対応している。微小すべり問題の接触剛性マトリクスは有限すべり接触接線剛性マトリクスの特例であり、その内容は本章の最後の部分で導入する。

まず、第 6.1 節では接触力学の基礎式を紹介し、変形問題の接触拘束条件は導入する。続く第 6.2 節で、接触を考慮した仮想仕事原理式を導入し、そこで接触拘束条件の処理方法を紹介する。最後に第 6.3 節で得られた仮想仕事式を有限要素法により離散化し、有限要素法に対応した接触剛性マトリクスを導く。

6.1. 接触力学

本節は接触問題に関わる基本方程式を紹介する。ここでは 2 物体の接触に関わる諸式を示すが、これらを多体間の接触問題へ拡張することもできる。

6.1.1. 表記法

本節では複数の変形体が有する場合の変形体の基準配置、現配置の表示方法を示している。

(1) 基準配置

2つの物体の接触問題を考える。両物体の初期配置は既知であり、基準配置と呼ぶ。基準配置の諸変数は大文字のローマ、あるいはギリシャを示す。基準配置中第*i*番目の物体は $\Omega^{(i)}$ と示す。

$\Omega^{(i)}$ 中の任意一点は $\mathbf{X}^{(i)}$ と示す。 $\Omega^{(i)}$ の境界は $\partial\Omega^{(i)}$ で示す。 $\partial\Omega^{(1)}$ と $\partial\Omega^{(2)}$ の間に接触可能な部分はそれぞれ $\Gamma^{(1)}$ と $\Gamma^{(2)}$ で表す。

(2) 現配置

現配置においた諸変数は小文字のローマ、あるいはギリシャを示す。現配置内の一点は $\mathbf{x}^{(i)}$ で表す。基準配置の各点から現配置の各点への同相写像 $\phi^{(i)}$ を存在することが仮定する。ある時刻の写像は下付き文字*t*と表す。そして、ある時刻*t*の一点の現在位置は $\phi_t^{(i)}(\mathbf{X}^{(i)})$ 、 $\phi^{(i)}(\mathbf{X}^{(i)}, t)$ または $\phi^{(i)}(\mathbf{X}^{(i)})$ とも表れる。同様に、各物体境界の現在位置も $\Gamma^{(i)}$ からの $\phi^{(i)}$ 写像から得られる。境界面の現在配置は $\gamma_t^{(i)} = \phi_t^{(i)}(\Gamma^{(i)})$ で示す。ここでは、時刻が特定できる場合では、下付き文字*t*を省略できる。

6.1.2. 接触キネマティクス

接触解析のすべては接触表面上行うため、接触面のキネマティクス関係を明らかにする必要がある。また、接触面キネマティクスを便利に議論するため、はじめに接触座標系を定義し、続きの議論はこの座標系の中で行う。

(1) 接空間基底

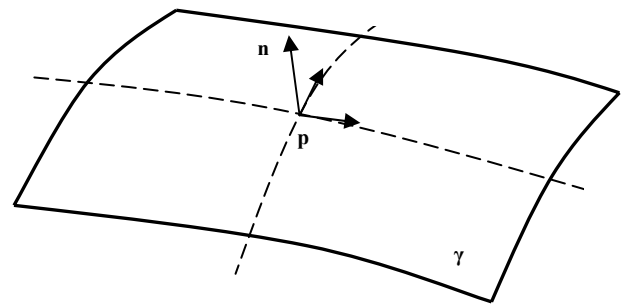


図 6.1.1 接ベクトル空間

境界面上の任意点の基準配置および現配置の位置は以下のように書かれる。

$$\mathbf{X}^{(i)} = \Psi_0^{(i)}(\xi^{(i)}) \quad (6.1.1)$$

$$\mathbf{x}^{(i)} = \Psi_t^{(i)}(\xi^{(i)}) \quad (6.1.2)$$

この写像は接触面のパラメータ化と呼び、 ξ はパラメータである。

接触面上の点を *p* で表す。点 *p* はパラメータを ξ として、曲線 $p(\xi)$ を描くとする。この曲線の接ベクトルが得られる。点 *p* におけるすべての可能な接ベクトルの作る空間を、点 *p* における接触面の接ベクトル空間または接空間と呼ぶ。

現配置の接空間基底は以下のように得られる：

$$\tau_{\alpha}^{(i)} = \Psi_{t\alpha}^{(i)}(\xi^{(i)}) \quad (6.1.3)$$

またその計量テンソルを $m_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha} \cdot \tau_{\beta}$ となる。

3次元空間では、2つの基準ベクトルが分かれば、下式を使って、表面の法線ベクトルを計算できる。

$$\mathbf{n}^{(i)} = \frac{\tau_1^{(2)} \times \tau_2^{(2)}}{\|\tau_1^{(2)} \times \tau_2^{(2)}\|} \quad (6.1.4)$$

(2) 法線方向距離と界面速度

本節では両接触面の距離および面間相対速度を定義する。まず一点から相手表面上の最近傍点（投影点とも呼ぶ）を定義する。この一点から投影点までの距離は法線方向距離であり、最近傍点の時間微分からすべり速度を測れる。

任意であるが、物体 $\Omega^{(1)}$ は slave 物体、物体 $\Omega^{(2)}$ は master 物体とする。離散化数値解析では slave と master 物体の選定は解析収束性などに影響を与えるが、ここでは特に区別する必要がない。

まず、Slave 物体の一点 $\mathbf{x}^{(1)}$ の master 物体への投影点 $\bar{\mathbf{x}}^{(2)}$ は最近傍点と定義する。最近距離は

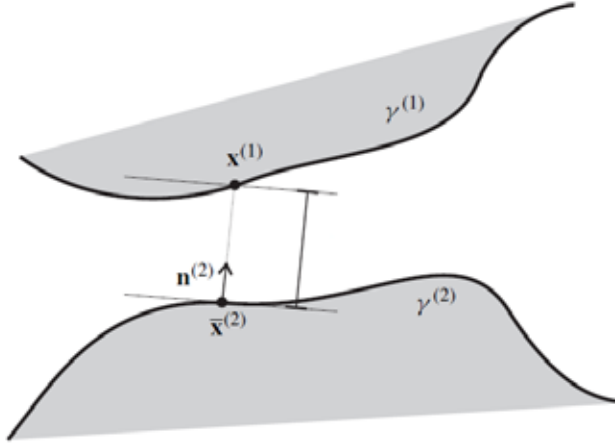


図 6.1.2 最短距離、投影点

$$\min_{\mathbf{x}^{(2)} \in \gamma^{(2)}} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\| \quad (6.1.5)$$

として与えられ、投影点 $\bar{\mathbf{x}}^{(2)} \in \gamma^{(2)}$ は以下のように定義される。

$$\bar{\mathbf{x}}^{(2)} = \arg \min_{\mathbf{x}^{(2)} \in \gamma^{(2)}} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\| \quad (6.1.6)$$

$\bar{\mathbf{x}}^{(2)}$ の位置は両接触体の変形および座標値 $\xi^{(1)}$ に依存する。この事実を強調するため、以下の式を導入する。

$$\bar{\xi}^{(2)} = \bar{\xi}^{(2)}(\xi^{(1)}, \phi_t^{(1)}, \phi_t^{(2)}) \quad (6.1.7)$$

ここで、上バー記号は投影点と関わる変数であることを示す。

そして、slave 物体の一点からその投影点の距離ベクトルは

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(1)}) = \mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)} \quad (6.1.8)$$

となる。ここでは

$$\bar{\mathbf{x}}^{(2)} = \Psi_t^{(2)}(\bar{\xi}^{(2)}) \quad (6.1.9)$$

として与えられ、その距離は

$$\mathbf{g}_N = \bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot [\mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}] \quad (6.1.10)$$

である。続いて、すべり速度を導く。はじめに slave 物体の一点 $\mathbf{x}^{(1)}$ とその接触点 $\bar{\mathbf{x}}^{(2)}$ を考慮する、この 2 点の法線方向の相対位置 $\mathbf{g}_N = 0$ である場合、この 2 点は空間の同じ位置と維持するので、

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}] = 0 \quad (6.1.11)$$

が得られる。そこで

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{x}^{(1)}] = \frac{d}{dt} [\Phi_t^{(1)}] = \mathbf{v}_t^{(1)} \quad (6.1.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\bar{\mathbf{x}}^{(2)}] &= \frac{d}{dt} [\Phi_t^{(2)}(\Psi_0^{(2)}(\bar{\xi}^{(2)}))] \\ &= \bar{\mathbf{v}}_t^{(2)} + \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \mathbf{X}^{(2)}} \cdot \frac{d}{dt} [\Psi_0^{(2)}(\bar{\xi}^{(2)})] = \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_t^{(2)} + \bar{\mathbf{F}}_t^{(2)} \cdot \bar{\Psi}_{0,\alpha}^{(2)} \frac{\dot{\bar{\xi}}^{(2)} \alpha}{\bar{\xi}^{(2)}} = \bar{\mathbf{v}}_t^{(2)} + \bar{\mathbf{t}}_\alpha^{(2)} \frac{\dot{\bar{\xi}}^{(2)} \alpha}{\bar{\xi}^{(2)}}$$

式(6.1.13)と式(6.1.12)を式(6.1.11)に代入し、接触点の相対すべり速度は以下の式に与えられる。

$$\mathbf{v}_T^{(1)} = \mathbf{v}_t^{(1)} - \bar{\mathbf{v}}_t^{(2)} = \frac{\dot{\bar{\xi}}^{(2)} \alpha}{\bar{\xi}^{(2)}} \bar{\mathbf{t}}_\alpha^{(2)} \quad (6.1.14)$$

最後に、すべり速度ベクトル $\mathbf{v}_T^{(1)}$ の成分 $\frac{\dot{\bar{\xi}}^{(2)} \alpha}{\bar{\xi}^{(2)}}$ は、 $\bar{\mathbf{x}}^{(2)}$ の定義式(6.1.6)より求められる。この定義から $\mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}$ は接触面と直交することが分かり、その式は

$$\bar{\mathbf{t}}_\alpha^{(2)} \cdot [\mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}] = 0 \quad (6.1.15)$$

となる。この式の物質時間微分をとり、さらに式(6.1.10)と式(6.1.13)を代入すると

$$\left[\mathbf{v}_t^{(1)} - \bar{\mathbf{v}}_t^{(2)} - \bar{\boldsymbol{\tau}}_{\beta}^{(2)} \frac{\dot{\xi}^{(2)}}{\xi} \right] \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha}^{(2)} + \quad (6.1.16)$$

$$g_N \bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \left[\bar{\mathbf{v}}_{t\alpha}^{(2)} + \boldsymbol{\Psi}_{t\alpha\beta}^{(2)} \left(\frac{\dot{\xi}^{(2)}}{\xi} \right) \bar{\boldsymbol{\tau}}_{\beta}^{(2)} \right] = 0$$

が得られる。この式を整理すると下の計算式が得られる。

$$A_{\alpha\beta} \frac{\dot{\xi}^{(2)}}{\xi} = \left[\mathbf{v}_t^{(1)} - \bar{\mathbf{v}}_t^{(2)} \right] \cdot \boldsymbol{\tau}_{\alpha}^{(2)} + g_N \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}}_{t\alpha}^{(2)} \quad (6.1.17)$$

ここで

$$A_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\tau}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\beta} - g_N \bar{\mathbf{x}}_{,\alpha\beta}^{(2)} \cdot \bar{\mathbf{n}}^{(2)} \quad (6.1.18)$$

特に接触点の貫通量 g_N が 0 の場合では下式が得られる。

$$\frac{\dot{\xi}^{(2)}}{\xi} \alpha = \left[\mathbf{v}_t^{(1)} - \bar{\mathbf{v}}_t^{(2)} \right] \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)\alpha} \quad (6.1.19)$$

6.1.3. 接触拘束条件

本節は、接触面法線方向の非貫通拘束条件および接触面接線方向の摩擦拘束条件を説明する。

(1) 接触力

接触力は Cauchy 応力から得られる。

$$\mathbf{t}^{(i)} = \boldsymbol{\sigma}^{(i)} \cdot \mathbf{n}^{(i)} \quad (6.1.20)$$

この接触力を接触面の法線とすべり方向へ分解すると

$$\mathbf{t}^{(i)} = \mathbf{t}_N^{(i)} + \mathbf{t}_T^{(i)} = (\mathbf{t}^{(i)} \cdot \mathbf{n}^{(i)}) \mathbf{n}^{(i)} + (\mathbf{I} - \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)}) \cdot \mathbf{t}^{(i)} \quad (6.1.21)$$

となる。

(2) 非貫通拘束条件

連続体力学では、2 点は同じ位置を有することを許容しない。そのため、両物体が接触する場合では、この条件は以下のように言い換える：slave 物体の任意点は master 物体に貫通することができない。この条件より、接触面法線方向の拘束条件は、

$$g_N \geq 0 \quad (6.1.22)$$

$$\mathbf{t}_N^{(i)} \leq 0 \quad (6.1.23)$$

$$\mathbf{t}_N^{(i)} \cdot \mathbf{g}_N^{(i)} = 0 \quad (6.1.24)$$

とする。ここでは、式(6.1.22)は接触点同士間の距離が必ずゼロ以上とする非貫通条件を示し、式(6.1.23)は接触力が圧縮力であることを示している。最後の式(6.1.24)は相補性条件を述べている。すなわち、接触していないときには圧縮力は発生しない、代わりに圧縮力が存在している場合では、貫通量がゼロである。最適化計算分野では、以上の 3 式は Kuhn-Tucker 条件または Karush-Kuhn-Tucker 条件と呼ばれる。

(3) 摩擦拘束条件

接触面内に摩擦効果が存在する場合、接触面内のすべり速度ベクトル $\mathbf{v}_T^{(i)}$ と接線方向接触力 $\mathbf{t}_T^{(i)}$ に関して、以下に示す摩擦条件を考えることができる。

$$\Phi^{(i)} \left(\left\| \mathbf{t}_T^{(i)} \right\|, \left\| \mathbf{t}_N^{(i)} \right\| \right) \leq 0 \quad (6.1.25)$$

$$\mathbf{v}_T^{(i)} = \dot{\zeta}^{(i)} \frac{\mathbf{t}_T^{(i)}}{\left\| \mathbf{t}_T^{(i)} \right\|} \quad (6.1.26)$$

$$\dot{\zeta}^{(i)} \geq 0 \quad (6.1.27)$$

$$\Phi^{(i)} \dot{\zeta}^{(i)} = 0 \quad (6.1.28)$$

ここで、 Φ はすべり限界関数であり、すべり発生条件を表している。例えば、クーロン摩擦を考える場合には、摩擦係数を μ とすると、すべり限界関数は以下ようになる

$$\Phi^{(i)} = \left\| \mathbf{t}_T^{(i)} \right\| - \mu \left\| \mathbf{t}_N^{(i)} \right\| \leq 0 \quad (6.1.29)$$

式(6.1.26)、式(6.1.27)はすべりが接触面内に作用する接触力ベクトル $\mathbf{t}_T^{(i)}$ に生じることを表しており、式(6.1.28)は面内接触力が摩擦限界に到達したときに限ってすべりが発生することを表している。また、 $\dot{\zeta}^{(i)} \geq 0$ はすべりパラメータであり、その値は条件 $\Phi^{(i)} \leq 0$ より決定される。

本ソフトウェアは Coulomb 摩擦則を採用している。Coulomb 則によれば、 $\Phi^{(i)} \leq 0$ のとき、接触す

る両物体間すべりなし、粘着摩擦、または静摩擦状態と呼ぶ。または、すべりがはじめる瞬間 $\Phi^{(i)} = 0$ であり、この状態はすべり摩擦、または動摩擦状態と呼ぶ。

実際問題として、物理的には接触力が摩擦限界に到達しなくても微小な相対変位を生じるし、また数学的な取り扱いの観点からも摩擦力が相対変位に対して不連続に変化することは好ましくない。そこで Coulomb 摩擦則は以下のように規則化されることもある。

6.2. 接触問題の弱形式

第 6.1 節では、接触問題を強形式で示した。この章では有限要素法定式化の準備として、接触問題の弱形式を議論する。

6.2.1. 変分形式

有限要素定式化は一般に変分形式を基本としている。ここでは、接触問題を含む連続体力学の問題の変分式を導く。

式(2.3.1)~(2.3.3)を参照し、接触を考慮した現配置下のつり合い方程式は以下になる。

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(i)} + \mathbf{q}^{(i)} = \rho^{(i)} \dot{\mathbf{v}}^{(i)} & \text{in } \omega \\ \boldsymbol{\sigma}^{(i)} \cdot \mathbf{n}^{(i)} = \tilde{\mathbf{t}}^{(i)} & \text{on } \gamma_{\sigma}^{(i)} \\ \Phi^{(i)} = \tilde{\Phi}^{(i)} & \text{on } \gamma_{\Phi}^{(i)} \end{cases} \quad (6.2.1)$$

(1) 接触積分

つり合い方程式(6.2.1)に任意の重み関数 $\mathbf{w}^{(i)}$ を乗じ、領域 ω 全体に積分すると次式が得られる。

$$\int_{\omega} [\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(i)} + \mathbf{q}^{(i)} - \rho^{(i)} \dot{\mathbf{v}}^{(i)}] \cdot \mathbf{w}^{(i)} d\omega = 0 \quad (6.2.2)$$

ここで、第 1 項について部分積分を用いて展開し、重み $\mathbf{w}^{(i)}$ は変位境界 $\gamma_{\Phi}^{(i)}$ では零である制約を加え、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} [\boldsymbol{\sigma}^{(i)} : \nabla \mathbf{w}^{(i)} + \rho^{(i)} \dot{\mathbf{v}}^{(i)} \cdot \mathbf{w}^{(i)} - \mathbf{q}^{(i)} \cdot \mathbf{w}^{(i)}] d\omega \\ & - \int_{\gamma_{\sigma}^{(i)}} \tilde{\mathbf{t}}^{(i)} \cdot \mathbf{w}^{(i)} d\gamma - \int_{\gamma_{\Phi}^{(i)}} \mathbf{t}^{(i)} \cdot \mathbf{w}^{(i)} d\gamma = 0 \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

ここで、 $\gamma^{(i)}$ は接触面を表している。

2 物体接触問題の弱形式は式(6.2.3)の加算から得られる。

$$G(\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{w}) = G^{\text{int}}(\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{w}) + G^{\text{ext}}(\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{w}) + G^c(\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{w}) = 0 \quad (6.2.4)$$

ここでは、

$$\begin{aligned} G^{\text{int}}(\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{w}) &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_{\omega} [\boldsymbol{\sigma}^{(i)} : \nabla \mathbf{w}^{(i)}] d\omega \right\} \\ G^{\text{ext}}(\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{w}) &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_{\omega} [\rho^{(i)} \dot{\mathbf{v}}^{(i)} \cdot \mathbf{w}^{(i)} - \mathbf{q}^{(i)} \cdot \mathbf{w}^{(i)}] d\omega - \int_{\gamma_{\sigma}^{(i)}} \tilde{\mathbf{t}}^{(i)} \cdot \mathbf{w}^{(i)} d\gamma \right\} \\ G^c(\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{w}) &= - \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_{\gamma_{\Phi}^{(i)}} \mathbf{t}^{(i)} \cdot \mathbf{w}^{(i)} d\gamma \right\} \end{aligned}$$

である。または、作用力と反作用力の法則から

$$\mathbf{t}^{(1)} d\gamma^{(1)} = -\mathbf{t}^{(2)} d\gamma^{(2)} \quad (6.2.5)$$

であり、この結果を式(6.2.4)の第 3 式に代入し、

$$G^c(\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{w}) = - \int_{\gamma^{(1)}} \mathbf{t}^{(1)} \cdot [\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^{(2)}] d\gamma \quad (6.2.6)$$

が得られる。

重み関数 $\mathbf{w}^{(i)}$ は仮想変位である場合には、式(6.2.4)は仮想仕事原理式を示す。このとき、式(6.2.6)は接触に関する仮想仕事である。

(2) 仮想仕事原理式

重み関数 $\mathbf{w}^{(i)}$ は仮想変位であるとき、式(6.2.6)は

$$G^c(\phi, \delta\phi) = - \int_{\gamma^{(1)}} \mathbf{t}^{(1)} \cdot [\delta\phi^{(1)} - \delta\phi^{(2)}] d\gamma \quad (6.2.7)$$

になる。この節では式(6.2.7)を使いやすい形に変換する。

(a) 距離関数の変分

距離関数(6.1.10)の変分は以下になる。

$$\begin{aligned} \delta g_N &= \delta \{ \bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot [\mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}] \} = \\ & [\mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}] \cdot \delta \bar{\mathbf{n}}^{(2)} + \bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \delta [\mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}] \\ &= g_N \bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \delta \bar{\mathbf{n}}^{(2)} + \bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \delta [\mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}] \\ &= \bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \delta [\mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}] \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

(b) 距離ベクトル関数の変分

式(6.1.8)から

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{g} &= \delta [\phi^{(1)}] - \delta [\phi^{(2)} (\Psi_o^{(2)}(\bar{\xi}^{(2)}))] \\ &= \delta \phi^{(1)} - \delta \bar{\phi}^{(2)} - \bar{\mathbf{t}}_\alpha^{(2)} \delta \bar{\xi}^{(2)\alpha} \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

である。

(c) 仮想変位の接触積分

まず式(6.2.7)中の接触力を法線方向とすべり方向に分解する。

$$\mathbf{t}^{(1)} = \mathbf{t}_N^{(1)} \mathbf{n}^{(1)} + \mathbf{t}_T^{(1)} = -\mathbf{t}_N^{(1)} \mathbf{n}^{(2)} + \mathbf{t}_T^{(1)} \quad (6.2.10)$$

そこで、式(6.2.8)、式(6.2.9)と式(6.2.10)を式(6.2.7)に代入すると

$$\begin{aligned} G^c(\phi, \delta\phi) &= - \int_{\gamma^{(1)}} [-\mathbf{t}_N^{(1)} \mathbf{n}^{(2)} + \mathbf{t}_T^{(1)}] \cdot [\delta g_N + \bar{\mathbf{t}}_\alpha^{(2)} \delta \bar{\xi}^{(2)\alpha}] d\gamma \\ &= - \int_{\gamma^{(1)}} [-\mathbf{t}_N^{(1)} \mathbf{n}^{(2)} + \mathbf{t}_T^{(1)}] \cdot [\delta g_N \mathbf{n}^{(2)} + \bar{\mathbf{t}}_\alpha^{(2)} \delta \bar{\xi}^{(2)\alpha}] d\gamma \\ &= \int_{\gamma^{(1)}} [\mathbf{t}_N^{(1)} \delta g_N - \mathbf{t}_T^{(1)} \cdot \bar{\mathbf{t}}_\alpha^{(2)} \delta \bar{\xi}^{(2)\alpha}] d\gamma \end{aligned}$$

$$(6.2.11)$$

が得られる。上式の右辺第 1、2 項はそれぞれ接触面法線方向とすべり方向の仮想仕事を示している。

ここでは、すべり方向の力成分 $\mathbf{t}_{T\alpha}^{(1)}$ およびすべり距離ベクトルの変分 $\delta \mathbf{g}_T$ を以下のように定義し

$$\mathbf{t}_{T\alpha}^{(1)} = \mathbf{t}_T^{(1)} \cdot \bar{\mathbf{t}}_\alpha^{(2)} \quad (6.2.12)$$

$$\delta \mathbf{g}_T = \bar{\mathbf{t}}_\alpha^{(2)} \delta \bar{\xi}^{(2)\alpha} \quad (6.2.13)$$

式(6.2.11)は以下のように変換される。

$$G^c(\phi, \delta\phi) = \int_{\gamma^{(1)}} [\mathbf{t}_N^{(1)} \delta g_N - \mathbf{t}_{T\alpha}^{(1)} \delta \bar{\xi}^{(2)\alpha}] d\gamma \quad (6.2.14)$$

$$G^c(\phi, \delta\phi) = \int_{\gamma^{(1)}} [\mathbf{t}_N^{(1)} \delta g_N - \mathbf{t}_T^{(1)} \cdot \delta \mathbf{g}_T] d\gamma \quad (6.2.15)$$

本節でここまで得られた結果を第 6.1 節に得られた接触拘束条件を加え、接触問題の支配方程式は以下のようにまとめる。

$$G(\phi, \mathbf{w}) = G^{\text{int}}(\phi, \mathbf{w}) + G^{\text{ext}}(\phi, \mathbf{w}) + G^c(\phi, \mathbf{w}) = 0 \quad (6.2.16)$$

その制約条件は

$$g_N^{(i)} \geq 0$$

$$\mathbf{t}_N^{(i)} \leq 0$$

$$\mathbf{t}_N^{(i)} \cdot \mathbf{g}_N^{(i)} = 0$$

$$\Phi^{(i)}(\|\mathbf{t}_T^{(i)}\|, \|\mathbf{t}_N^{(i)}\|) \leq 0$$

$$\mathbf{v}_T^{(i)} = \dot{\zeta}^{(i)} \frac{\mathbf{t}_T^{(i)}}{\|\mathbf{t}_T^{(i)}\|}$$

$$\dot{\zeta}^{(i)} \geq 0$$

$$\Phi^{(i)} \dot{\zeta}^{(i)} = 0$$

となる。

ここまでは、接触に関する仮想仕事 G^c を得るため、

slave 接触面 $\gamma^{(1)}$ に沿った面積積分を行う必要があることが分かった。しかし、式(6.2.16)に示した接触拘束条件が不等式であり、計算上にそれらの不等式を等式へ変換する必要がある。このような不等式の処理方法は最適化計算分野でいろいろな方法提案されたが、本ソフトウェアは有効セット(active set または active constraint)法を採用する。ここでは、有効接触点は接触状態 (貫通量 $\mathbf{g}_N = 0$) である状態に有する空間点と意味し、拘束条件は有効接触点だけを対象とし、 \mathbf{G}^c に関わる積分計算はすべて有効接触領域内で行うことになる。

ある接触点は有効であるかどうかを明示的に表すため、次節では、記号 $\langle \cdot \rangle$

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases} \quad (6.2.17)$$

また非連続関数記号 $H(\cdot)$

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases} \quad (6.2.18)$$

を採用する。

次の節では、等式化された接触拘束条件の取り扱いについて議論する。

6.2.2. 接触拘束条件の処理方法

この節では仮想仕事式(6.2.4)を議論する。ただし、接触処理に注目したいので、 \mathbf{G}^c 項の表現について集中的に議論する。

最適化計算分野では、式(6.1.22)～(6.1.24)に示した Kuhn-Tucker 条件に対し、いろんな解法を提案された。これらの方法を転用し、有限要素法解析ではよく使われる方法は Penalty 関数法、Lagrange 乗数法があるが、本ソフトウェアではこの 2 つ方法のメリットを取り入れた Augmented Lagrange 法を採用する。本節では、Penalty 関数法、Lagrange 乗数法および Augmented Lagrange 法を説明し、それぞれの長点および短点を議論し、Augmented Lagrange 法を採用した理由を明らかにする。また、一部の接触拘束は多点拘束条件とみなすことができるので、直接消去法についても説明を行う。

(1) Lagrange 乗数法

Lagrange 乗数法は新たな独立変数 λ_N と λ_T を導入し、式(6.2.16)を以下のように書き換える。

$$G^{\text{int}}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{w}) + G^{\text{ext}}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{w}) + \int_{\gamma^{(1)}} (\lambda_N \delta \mathbf{g}_N + \lambda_T \cdot \delta \mathbf{g}_T) d\gamma = 0 \quad (6.2.19)$$

$$\int_{\gamma^{(1)}} (\delta \lambda_N \mathbf{g}_N + \delta \lambda_T \cdot \mathbf{g}_T) d\gamma = 0 \quad (6.2.20)$$

ここでは、新たに導入した変数 λ_N と λ_T は Lagrange 乗数であり、 \mathbf{g}_N と \mathbf{g}_T は貫通量およびすべり量である。

ここでは、式(6.2.19)は接触を考慮した仮想仕事式であり、式(6.2.15)から、 λ_N と λ_T はそれぞれ接触面の法線方向とすべり方向の力であることが分かる。そのため、Lagrange 乗数法は一種な混合解法であることが分かる。

Lagrange 乗数法は後と紹介する Penalty 関数法および Augmented Lagrange 法と比べ、active set は正しく選択した場合では反復計算が必要なく、正確に接触力を得られるが、以下の欠点がある：

- ・ 変数の数が増える。
- ・ 得られた方程式は不定である。

数値計算で(6.2.19)～(6.2.20)を解くとき、変数の数が増えると計算コストがかかる。または、並列計算を利用したとき、メモリ管理および計算資源の配分も難しくなる。一方、方程式の正定性を失うと、線型方程式ソルバーでの取り扱いが難しくなり、反復法で解くと収束性が悪いこともある。

(2) Penalty 関数法

Penalty 関数法は、制約条件を満たさない点に対して非常に大きな Penalty を目的関数に付け加えて制約のない問題へ変換する方法である。この方法では、式(6.2.16)を以下のように書き換える。

すべり摩擦状態では

$$G^{\text{int}}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{w}) + G^{\text{ext}}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{w}) + \int_{\gamma^{(1)}} (\epsilon_N \mathbf{g}_N \delta \mathbf{g}_N + \mathbf{t}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T) d\gamma = 0 \quad (6.2.21)$$

となり、粘着摩擦状態では

$$G^{\text{int}}(\phi, \mathbf{w}) + G^{\text{ext}}(\phi, \mathbf{w}) + \int_{\gamma^{(3)}} (\epsilon_N \mathbf{g}_N \delta \mathbf{g}_N + \epsilon_T \mathbf{g}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T) d\gamma = 0 \quad (6.2.22)$$

となる。ここでは、 $\epsilon_N > 0$ と $\epsilon_T > 0$ は Penalty 定数であり、 $\epsilon_N \rightarrow \infty$ と $\epsilon_T \rightarrow \infty$ になると、Lagrange 乗数法と同様な結果が得られる。しかし、数値解析では ϵ_N と ϵ_T を有限な数値しか取れないため、Penalty 法から得られた結果は第 6.1 節で紹介した接触条件から外れることになる。

Penalty 法のメリットは以下である：

- ・ Lagrange 法と比べ、変数の数が増えない。
- ・ プログラムに実装しやすい。

Penalty 法の欠点は以下である：

- ・ 理論的には Penalty 定数 ϵ_N と ϵ_T の数値が大きくなると、正解に近い結果が得られるが、数値計算の立場で見ると得られる方程式の性質が悪くなり、線型方程式を反復法で解くと収束性が悪くなる。
- ・ 数値計算では Penalty 定数 ϵ_N と ϵ_T の数値を有限な数値にしか取れないため、得られた結果は近似的である。

(3) Augmented Lagrange 法 (乗数法)

Penalty 法では、Penalty 定数が大きくなるにつれて、変換される問題を数値的に行うことが困難になる欠点があった。このような欠点を改良するために、Lagrange 関数に、Penalty 項を付け替えた Augmented Lagrange 関数を導入して、Augmented Lagrange 関数の最小化と Lagrange 乗数の更新により最適解を求めるという Augmented Lagrange 法あるいは乗数法と呼ばれる手法が提案されている。

Augmented Lagrange 法では、仮想仕事式を以下のように記述する。

$$G^{\text{int}}(\phi, \mathbf{w}) + G^{\text{ext}}(\phi, \mathbf{w}) + \int_{\gamma^{(3)}} [t_N \delta \mathbf{g}_N - t_{T\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha] d\gamma = 0 \quad (6.2.23)$$

その制約条件は以下になる

$$\mathbf{t}_N = (\lambda_N + \epsilon_N \mathbf{g}_N) \quad (6.2.24)$$

$$\Phi = \|\mathbf{t}_T\| - \mu \|\mathbf{t}_N\| \leq 0$$

$$\mathbf{v}_T - \dot{\zeta} \frac{\mathbf{t}_T}{\|\mathbf{t}_T\|} = \frac{1}{\epsilon_T} (\mathbf{t}_T - \lambda_T)$$

$$\dot{\zeta} \geq 0$$

$$\Phi \dot{\zeta} = 0$$

ここでは、 ϵ_N と ϵ_T はユーザー定義定数であり、Penalty 定数のような大きな数値をとる必要がない。仮に λ_N と λ_T は正確な接触力を表すとき、 \mathbf{g}_N がゼロになり、上式と式(6.2.19)は一致し、Augmented Lagrange 法と Lagrange 法は同義であることが分かる。

式(6.2.25)の解法はいろいろがある。その 1 つは単に Lagrange 法の拡張であり、その Lagrange 乗数にユーザー定義定数を加え、Lagrange 法は変換される問題の不定性を取り除くことができる。このとき、Lagrange 法と同じく、変数の数が増えるが、変換される問題の不定性を取り除くことができ、さらに ϵ_N と ϵ_T は大きな数値をとる必要がないので、Penalty 法における数値計算上の問題もなくなる。

上記の解法では、未知となる Lagrange 乗数を直接解く方法であり、変数の数は増える欠点があった。そこで、Lagrange 乗数を反復計算より解く方法(乗数法)を提案された。その計算手順は以下になる。

1. Lagrange 乗数の初期値を仮定する。
2. Lagrange 乗数の初期値を利用し、式(6.2.25)を解く。
3. 接触力を更新する。
4. 更新後の接触力は式(6.2.26)を満足するかどうかをチェックする。満足したと判断する場合は計算は終了し、そうでなければ Lagrange 乗数を更新し、ステップ 2 に戻り、もう一度計算する。

このアルゴリズムを採用すると、変換される問題の変数の数は増えないが、反復計算が必要となる。

Lagrange 法と Penalty 法と比べ、Augmented Lagrange 法は若干の計算時間的な犠牲を払い、新しい独立変数を導入せず、数値計算にも悪い影響を与えない方法である。その他、Augmented Lagrange 法を少し修正すれば、摩擦接触問題から得られた非対称方程式を対称方程式へ変換でき、計算コストの削減にも有力である。そのため、本ソフトウェアはこの方法を採用している。第 6.3 節では、この方法の実現詳細を説明する。

(4) 自由度直接消去法

接触に関わる制約条件の中で、有効接触点の非貫通条件（式(6.2.30)を参照）または粘着摩擦条件は以下のように直接節点の位置関係を定義している。

$$\bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot [\mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}] = 0 \quad (6.2.25)$$

$$[\mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}] = 0 \quad (6.2.26)$$

これらの方程式では、関連節点の変位を拘束し、その拘束条件から直接変位自由度を削除することができる。

ある時刻 t で粘着摩擦条件(6.2.28)を満足するとき、接触点の速度 \mathbf{v}_t 以下の式が得られる。

$$\mathbf{v}_t^{(1)} = \mathbf{v}_t^{(2)} \quad (6.2.27)$$

または、 $\mathbf{x}^{(1)}$ 点 $\bar{\mathbf{x}}^{(2)}$ 間の初期貫通量 g_N であるとき、式(6.2.27)から以下の拘束条件が得られる。

$$\bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot [\mathbf{v}_t^{(1)} - \bar{\mathbf{v}}_t^{(2)}] dt = g_N \quad (6.2.28)$$

自由度直接消去法の応用は限られた範囲内しかできないが、Lagrange 法と Penalty 法のような数値計算の問題を生じなく、Augmented Lagrange 法のような反復計算も必要がないので、有効な方法である。

本ソフトウェアは微小すべり摩擦なし問題を処理するとき、自由度消去法を採用している。

6.2.3. 接触仮想仕事の線形化処理

Newton-Raphson 法を用いて非線形方程式を解くとき、その弱形式の線形形式 consistent 接線係数

が必要となる。接触除く部分の consistent 接線係数は第 4 章を参照できるので、この節では、接触の接線係数を求める方法を説明する。

式(6.2.14)では接触仮想仕事を示している。

$$G^c = \int_{\gamma^{(1)}} [\mathbf{t}_N^{(1)} \delta g_N - \mathbf{t}_T^{(1)} \cdot \delta \mathbf{g}_T] d\gamma = \quad (6.2.29)$$

$$\int_{\gamma^{(1)}} \mathbf{t}_N^{(1)} \delta g_N d\gamma + \int_{\gamma^{(1)}} \mathbf{t}_{T\alpha}^{(1)} \delta \bar{\xi}^{(2)\alpha} d\gamma$$

本節では、この式に Hessian 操作をかけ、線形化処理を行う。

(1) 法線方向

式(6.2.29)右側第 1 項は法線方向変位と関わる仮想仕事である。Lagrange 法を採用するとき、その線形化式は

$$\Delta G_N^T = \delta g_N \Delta \lambda_N + \lambda_N \Delta \delta g_N \quad (6.2.30)$$

となる。また、Penalty 法を採用するとき、その線形化式以下になる。

$$\Delta G_N^T = \epsilon_N \delta g_N \Delta g_N + \epsilon_N g_N \Delta \delta g_N \quad (6.2.31)$$

これらの式を得るため、次では δg_N 、 Δg_N と $\Delta \delta g_N$ の計算方法をまとめる。

(a) δg_N と Δg_N

g_N の変分は式(6.2.8)から得られた。

$$\delta g_N = [\delta \mathbf{x}^{(1)} - \delta \bar{\mathbf{x}}^{(2)}] \cdot \bar{\mathbf{n}}^{(2)} \quad (6.2.32)$$

式(6.2.32)と同様であり、下記に示す。

$$\Delta g_N = [\Delta \mathbf{x}^{(1)} - \Delta \bar{\mathbf{x}}^{(2)}] \cdot \bar{\mathbf{n}}^{(2)} \quad (6.2.33)$$

(b) $\Delta \bar{\xi}^{(2)\alpha}$

式(6.1.17)と同様で、

$$A_{\alpha\beta}\Delta\bar{\xi}^{(2)\beta} = [\Delta\mathbf{x}^{(1)} - \Delta\bar{\mathbf{x}}^{(2)}] \cdot \bar{\mathbf{t}}_{\alpha}^{(2)} - g_N \bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \Delta\bar{\mathbf{x}}_{,\alpha}^{(2)} \quad (6.2.34)$$

が得られる。

次では、接触面の接ベクトルおよび法線ベクトルと関わる計算を行う。しかし、式(6.2.12)に示したように、接触仮想仕事を計算するとき、master 面の接ベクトルを使っているの、ここでは master 面と関わるベクトルだけを議論する。

(c) 接ベクトルの変分と増分

現配置の接ベクトルの定義は式(6.1.9)で表している。ここで、接触点の接ベクトルは $\bar{\mathbf{t}}_{\alpha}^{(2)} = \bar{\mathbf{x}}_{,\alpha}^{(2)}$ と書き換え、その変分と増分は以下になる

$$\delta\bar{\mathbf{t}}_{\alpha}^{(2)} = \delta\bar{\mathbf{x}}_{,\alpha}^{(2)} + \bar{\mathbf{x}}_{,\alpha\beta}^{(2)}\delta\xi^{\beta} \quad (6.2.35)$$

$$\Delta\bar{\mathbf{t}}_{\alpha}^{(2)} = \Delta\bar{\mathbf{x}}_{,\alpha}^{(2)} + \bar{\mathbf{x}}_{,\alpha\beta}^{(2)}\Delta\xi^{\beta} \quad (6.2.36)$$

(d) 接触法線ベクトルの変分と増分

接線方向と法線方向の直交性条件

$$\bar{\mathbf{t}}_{\alpha}^{(2)} \cdot \bar{\mathbf{n}}^{(2)} = 0 \text{ から}$$

$$\delta\bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \bar{\mathbf{t}}_{\alpha}^{(2)} = -\bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \delta\bar{\mathbf{t}}_{\alpha}^{(2)} \quad (6.2.37)$$

が得られる。そこで、条件 $\bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \delta\bar{\mathbf{n}}^{(2)} = 0$ を利用し、法線ベクトルの変分は

$$\delta\bar{\mathbf{n}}^{(2)} = -[\bar{\mathbf{t}}^{(2)\alpha} \otimes \bar{\mathbf{n}}^{(2)}]\delta\bar{\mathbf{t}}_{\alpha}^{(2)} = -(\bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \delta\bar{\mathbf{t}}_{\alpha}^{(2)})\bar{\mathbf{t}}^{(2)\alpha} \quad (6.2.38)$$

が得られる。同様法線ベクトルの増分は

$$\Delta\bar{\mathbf{n}}^{(2)} = -[\bar{\mathbf{t}}^{(2)\alpha} \otimes \bar{\mathbf{n}}^{(2)}]\Delta\bar{\mathbf{t}}_{\alpha}^{(2)} = -(\bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \Delta\bar{\mathbf{t}}_{\alpha}^{(2)})\bar{\mathbf{t}}^{(2)\alpha} \quad (6.2.39)$$

になる。

また、

$$\Delta(\bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \delta\bar{\mathbf{n}}^{(2)}) = \Delta\bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \delta\bar{\mathbf{n}}^{(2)} + \bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \Delta\delta\bar{\mathbf{n}}^{(2)} = 0 \text{ から、}$$

$$\bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \Delta\delta\bar{\mathbf{n}}^{(2)} = -\Delta\bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \delta\bar{\mathbf{n}}^{(2)} \quad (6.2.40)$$

が得られる。

(e) $\Delta\delta g_N$

まず式(6.1.16)を以下の形式へ変換する。

$$\mathbf{x}^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)} = g_N \bar{\mathbf{n}}^{(2)} \quad (6.2.41)$$

上式の変分を考え

$$\delta\mathbf{x}^{(1)} - \delta\bar{\mathbf{x}}^{(2)} - \bar{\mathbf{t}}_{\alpha}\delta\xi^{\alpha} = \delta g_N \bar{\mathbf{n}}^{(2)} + g_N \delta\bar{\mathbf{n}}^{(2)} \quad (6.2.42)$$

になる。次に式(6.2.42)の増分計算をとる。

$$\begin{aligned} & -[\delta\bar{\mathbf{x}}_{,\alpha}^{(2)}\Delta\xi^{\alpha} + \Delta\bar{\mathbf{x}}_{,\alpha}^{(2)}\delta\xi^{\alpha} + \bar{\mathbf{x}}_{,\alpha\beta}^{(2)}\Delta\xi^{\beta}\delta\xi^{\alpha} + \bar{\mathbf{x}}_{,\alpha}^{(2)}\Delta\delta\xi^{\alpha}] \\ & = \Delta\delta g_N \bar{\mathbf{n}}^{(2)} + \delta g_N \Delta\bar{\mathbf{n}}^{(2)} + \Delta g_N \bar{\mathbf{n}}^{(2)} + \delta g_N \Delta\delta\bar{\mathbf{n}}^{(2)} \end{aligned} \quad (6.2.43)$$

上式の両側に $\bar{\mathbf{n}}^{(2)}$ をかけると、

$$\Delta\delta g_N = -(\delta\bar{\mathbf{x}}_{,\alpha}^{(2)}\Delta\xi^{\alpha} + \Delta\bar{\mathbf{x}}_{,\alpha}^{(2)}\delta\xi^{\alpha} + \bar{\mathbf{x}}_{,\alpha\beta}^{(2)}\Delta\xi^{\beta}\delta\xi^{\alpha})$$

$$\cdot \bar{\mathbf{n}}^{(2)} - g_N \bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \Delta\delta\bar{\mathbf{n}}^{(2)}$$

$$(6.2.44)$$

が得られる。この式に式(6.2.35)～式(6.2.38)、式(6.2.40)～式(6.2.42)を代入し

$$\begin{aligned} \Delta\delta g_N = & -(\delta\bar{\mathbf{x}}_{,\alpha}^{(2)}\Delta\xi^{\alpha} + \Delta\bar{\mathbf{x}}_{,\alpha}^{(2)}\delta\xi^{\alpha} + \bar{\mathbf{x}}_{,\alpha\beta}^{(2)}\Delta\xi^{\beta}\delta\xi^{\alpha}) \cdot \bar{\mathbf{n}}^{(2)} \\ & + g_N \bar{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot (\delta\bar{\mathbf{x}}_{,\alpha}^{(2)} + \bar{\mathbf{x}}_{,\alpha\beta}^{(2)}\delta\xi^{\beta}) m^{\alpha\gamma} (\Delta\bar{\mathbf{x}}_{,\gamma}^{(2)} + \bar{\mathbf{x}}_{,\gamma\theta}^{(2)}\Delta\xi^{\theta}) \cdot \bar{\mathbf{n}}^{(2)} \end{aligned} \quad (6.2.45)$$

となる。

(2) 接線方向

式(6.2.29)右側第2項はすべり方向変位、または摩擦に関する仮想仕事である。式(6.2.29)に示したように、この摩擦仮想仕事式は以下である。

$$G_T^c = \mathbf{t}_T \cdot \delta\mathbf{g}_T = \mathbf{t}_{T,\alpha}\delta\xi^{\alpha} \quad (6.2.46)$$

すべり摩擦状態では

$$\Delta G_T^c = \Delta t_{T_\alpha} \delta \xi^\alpha + t_{T_\alpha} \Delta \delta \xi^\alpha \quad (6.2.47)$$

また、完全粘着状態において、Lagrange 法を採用するとき

$$\Delta G_T^c = \Delta \lambda_{T_\alpha} \delta \xi^\alpha + \lambda_{T_\alpha} \Delta \delta \xi^\alpha \quad (6.2.48)$$

となり、Penalty 法を採用するとき

$$\Delta G_T^c = \epsilon_T \Delta g_{T_\alpha} \delta \xi^\alpha + \epsilon_T g_{T_\alpha} \Delta \delta \xi^\alpha \quad (6.2.49)$$

になる。

摩擦項の線形化形式を得るため、 Δt_{T_α} 、 $\delta \xi^\alpha$ と $\Delta \delta \xi^\alpha$ を得る必要がある。ここでは、 Δt_{T_α} は摩擦構成式と深く関わるため、その説明は第 6.3 節に譲る。また、前節では $\delta \xi^\alpha$ がすでに得られ、続きでは $\Delta \delta \xi^\alpha$ を導く。

式(6.2.43)の両側に τ_Y をかける。

$$\begin{aligned} & +(\Delta g_N \delta \bar{n}^{(2)} + \delta g_N \Delta \bar{n}^{(2)} + g_N \Delta \delta \bar{n}^{(2)}) \cdot \tau_Y \\ -m_{\alpha\gamma}^{(2)} \Delta \delta \xi^\alpha & = (\delta \bar{x}_{,\alpha}^{(2)} \Delta \xi^\alpha + \Delta \bar{x}_{,\alpha}^{(2)} \delta \xi^\alpha + \bar{x}_{,\alpha\beta}^{(2)} \Delta \xi^\beta \delta \xi^\alpha) \cdot \tau_Y \end{aligned} \quad (6.2.50)$$

そこで

$$\begin{aligned} \Delta \delta \bar{\tau}_Y^{(2)} & = \Delta (\delta \bar{x}_{,\alpha}^{(2)} + \bar{x}_{,\gamma\alpha}^{(2)} \delta \xi^\alpha) = \\ & \delta \bar{x}_{,\gamma\alpha}^{(2)} \Delta \xi^\alpha + \Delta \bar{x}_{,\gamma\alpha}^{(2)} \delta \xi^\alpha + \bar{x}_{,\gamma\alpha\beta}^{(2)} \delta \xi^\alpha \Delta \xi^\beta + \bar{x}_{,\gamma\alpha}^{(2)} \Delta \delta \xi^\alpha \end{aligned} \quad (6.2.51)$$

である。また、

$$\begin{aligned} \Delta [\delta (\bar{\tau}_Y^{(2)} \cdot \bar{n}^{(2)})] & = \Delta (\delta \bar{\tau}_Y^{(2)} \cdot \bar{n}^{(2)} + \bar{\tau}_Y^{(2)} \cdot \delta \bar{n}^{(2)}) = \\ \Delta \delta \bar{\tau}_Y^{(2)} \cdot \bar{n}^{(2)} & + \Delta \bar{\tau}_Y^{(2)} \cdot \delta \bar{n}^{(2)} + \delta \bar{\tau}_Y^{(2)} \cdot \Delta \bar{n}^{(2)} + \bar{\tau}_Y^{(2)} \cdot \Delta \delta \bar{n}^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (6.2.52)$$

となるから

$$-\bar{\tau}_Y^{(2)} \cdot \Delta \delta \bar{n}^{(2)} = \Delta \delta \bar{\tau}_Y^{(2)} \cdot \bar{n}^{(2)} + \Delta \bar{\tau}_Y^{(2)} \cdot \delta \bar{n}^{(2)} + \delta \bar{\tau}_Y^{(2)} \cdot \Delta \bar{n}^{(2)} \quad (6.2.53)$$

が得られる。

式(6.2.53)を式(6.2.47)に代入し

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta} \Delta \delta \xi^\beta & = -\bar{\tau}_\alpha^{(2)} \cdot (\delta \bar{x}_{,\beta}^{(2)} \Delta \xi^\beta + \Delta \bar{x}_{,\beta}^{(2)} \delta \xi^\beta) \\ & - (\bar{\tau}_\alpha^{(2)} \cdot \bar{\tau}_{,\beta\gamma}^{(2)} - g_N \bar{n}^{(2)} \cdot \bar{x}_{,\alpha\beta\gamma}^{(2)}) \delta \xi^\beta \Delta \xi^\alpha \\ & + g_N (\delta \bar{x}_{,\alpha\beta}^{(2)} \Delta \xi^\beta + \Delta \bar{x}_{,\alpha\beta}^{(2)} \delta \xi^\beta) \cdot \bar{n}^{(2)} \\ & - (\delta \bar{x}_{,\alpha}^{(2)} + \bar{x}_{,\alpha\gamma}^{(2)} \delta \xi^\gamma) \cdot \bar{\tau}_\beta^{(2)} \Delta \xi^\beta \\ & - (\Delta \bar{x}_{,\alpha}^{(2)} + \bar{x}_{,\alpha\gamma}^{(2)} \Delta \xi^\gamma) \cdot \bar{\tau}_\beta^{(2)} \delta \xi^\beta \\ & + (\delta \bar{x}^{(1)} - \delta \bar{x}^{(2)}) \cdot (\Delta \bar{x}_{,\alpha}^{(2)} + \bar{x}_{,\alpha\gamma}^{(2)} \Delta \xi^\gamma) + \\ & (\Delta \bar{x}^{(1)} - \Delta \bar{x}^{(2)}) \cdot (\delta \bar{x}_{,\alpha}^{(2)} + \bar{x}_{,\alpha\gamma}^{(2)} \delta \xi^\gamma) \end{aligned} \quad (6.2.54)$$

が得られる。

以上のことから、接触に関わる仮想仕事式 G^c (式(6.2.29))の増分は

$$\begin{aligned} \Delta G^c & = \Delta \left(\int_{\gamma^{(1)}} [t_N^{(1)} \delta g_N + t_{T_\alpha}^{(1)} \delta \bar{\xi}^{(2)\alpha}] d\gamma \right) = \\ & \int_{\gamma^{(1)}} [\Delta t_N^{(1)} \delta g_N + t_N^{(1)} \Delta \delta g_N + \Delta t_{T_\alpha}^{(1)} \delta \bar{\xi}^{(2)\alpha} + t_{T_\alpha}^{(1)} \Delta \delta \bar{\xi}^{(2)\alpha}] d\gamma \end{aligned} \quad (6.2.55)$$

となり、この式へ式(6.2.32)、式(6.2.45)、式(6.2.34)、式(6.2.54)を代入すれば、 $\Delta t_N^{(1)}$ と $\Delta t_{T_\alpha}^{(1)}$ の構成関係式を除く、各項すべて揃えた。 $\Delta t_N^{(1)}$ と $\Delta t_{T_\alpha}^{(1)}$ の構成関係式は時間の増分計算手法と関わるので、次の節では明らかにする。

6.3. 有限要素法接触解析

6.3.1. はじめに

有限要素法を用いて接触解析を行う場合には、解析すべき領域が有限要素によってモデル化され、表面は端部を構成する要素の要素境界 (3次元モデルの場合は面) から構成される。したがって、接触条件は端部の要素境界について考察することになる。

そこで、第 6.2 節で得られた仮想仕事式(6.2.4)の離散化式は以下のような有限個変数の非線形微分方程式になる。

$$\mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{d}(t)) + \mathbf{F}^c(\mathbf{d}(t)) = \mathbf{F}^{\text{ext}}(t) \quad (6.3.1)$$

ここでは、 \mathbf{F}^{int} は内力ベクトル、 \mathbf{F}^c は接触力ベクトル、 \mathbf{F}^{ext} は外力ベクトル、 \mathbf{d} は節点変数を表す。特に \mathbf{d} は節点変位を表す場合では、 \mathbf{u} または $\boldsymbol{\phi}$ とも書く。本章では接触と関わる部分だけを説明する。

一般的には方程式(6.3.1)は非線形である。その非線形性は \mathbf{F}^{int} と \mathbf{F}^c によるものである。内力ベクトルは幾何非線形と材料非線形を含み、接触による非線形性は第6.1節および第6.2節で説明した。式(6.3.1)を線形化した式は以下になる

$$\mathbf{K}\mathbf{d}(t) + \mathbf{K}^c\mathbf{d}(t) = \mathbf{F}^{\text{ext}}(t) \quad (6.3.2)$$

そこで、接触剛性マトリクスは以下ようになる。

$$\mathbf{K}^c(\mathbf{d}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} \mathbf{F}^c(\mathbf{d}) \quad (6.3.3)$$

ここでは、接触に関わる外力ベクトルは接触力 $\mathbf{F}^c(\mathbf{d})$ として式(6.2.31)から計算でき、その線形化した式 $\mathbf{K}^c(\mathbf{d})$ は式(6.2.55)から計算できる。

本節での主な目的は式(6.3.2)に示した接触剛性マトリクスを得ることである。

6.3.2. 接触の離散化表現

(1) 接触面の離散化表現

式(5.1.2)から、面要素内の任意一点座標は

$$\mathbf{x}_e^h = \sum_{i=1}^{n_{n_e}} N_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_i \quad (6.3.4)$$

になる。ここで、 $N_i(\boldsymbol{\xi})$ は形状関数であり、 n_{n_e} は面要素の節点数である。また、面要素内の一点接線方向は

$$\boldsymbol{\tau}_{e\xi}^h = \frac{\partial \mathbf{x}_e^h}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{n_{n_e}} \frac{\partial N_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi} \mathbf{x}_i \quad (6.3.5)$$

になり、その法線方向は式(6.1.4)から計算できる。

(2) 接触点探索

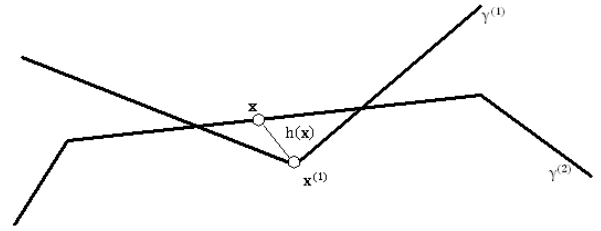


図 6.3.1 slave 面から master 面までの距離

接触点の定義は式(6.1.6)で与えられる。この条件を利用し接触点の位置を計算する。

$$\min(h(\mathbf{x})); \quad h(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x})^2 \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, \eta) \in \gamma^{(2)} \quad (6.3.6)$$

この最適化問題を Newton-Raphson 法を利用して解く。

Newton-Raphson 法は最適性の必要条件を与える非線形方程式

$$\nabla h(\mathbf{x}) = 0 \quad (6.3.7)$$

を初期点 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^1$ 接触要素面の中心点から出発して、繰り返して解くことより、最適点を見出す。

ここで、点 \mathbf{x}^1 において $\nabla^T h$ を線形近似すると

$$\mathbf{0} = \nabla^T h(\mathbf{x}) \cong \nabla^T h(\mathbf{x}^1) + \nabla^2 h(\mathbf{x}^1)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^1) \quad (6.3.8)$$

となるので、解を次の点 \mathbf{x}^{1+1} とすると、 \mathbf{x}^{1+1} は

$$\mathbf{x}^{1+1} = \mathbf{x}^1 - [\nabla^2 h(\mathbf{x}^1)]^{-1} \nabla^T h(\mathbf{x}^1) \quad (6.3.9)$$

として、この計算 $\|\mathbf{x}^{1+1} - \mathbf{x}^1\| < \varepsilon$ まで計算し続ける。

この計算完了すると、接触点 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, \eta) \in \gamma^{(2)}$ の局所座標 (ξ, η) が得られる。

ここでは、

$$\nabla h(\mathbf{x}^1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial \xi} & \frac{\partial h}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (6.3.10)$$

$$\nabla^2 h(\mathbf{x}^1) = \begin{bmatrix} h_{,\xi\xi} & h_{,\xi\eta} \\ h_{,\eta\xi} & h_{,\eta\eta} \end{bmatrix} \quad (6.3.11)$$

とする。

(3) 接触面上の数値積分

離散化した接触仮想仕事式(6.2.31)は以下のようになる

$$G^c \approx \int_{\gamma^{(1)h}} \left[t_N^h \delta g_N^h + t_{T\alpha}^h \delta \bar{\xi}^{\alpha h} \right] d\gamma \quad (6.3.12)$$

また、この式を要素ごとに積分すると、次のように近似できる。

$$\begin{aligned} G^c &\approx \sum_{e=1}^{n_{se}} \left\{ \int_{\gamma^{(1)h_e}} \left[t_N^h \delta g_N^h + t_{T\alpha}^h \delta \bar{\xi}^{\alpha h} \right] d\gamma \right\} \\ &\approx \sum_{e=1}^{n_{se}} \left\{ \sum_{k=1}^{n_{int}} w^k J(\xi^k) \left[t_N^h(\xi^k) \delta g_N^h(\xi^k) + t_{T\alpha}^h(\xi^k) \delta \bar{\xi}^{\alpha h}(\xi^k) \right] \right\} \\ &= \sum_{e=1}^{n_{se}} \left\{ \sum_{k=1}^{n_{int}} w^k J(\xi^k) \delta \phi^{c^k} \cdot f^k \right\} \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

ここで、 n_{se} は slave 要素数、 n_{int} は要素積分点数、 ξ^k は積分点座標、 w^k は積分点の重み、 J は Jacobian を表す。または、 $\delta \phi^{c^k}$ は積分点 k の節点変分ベクトルであり、 f^k は積分点 k の接触力ベクトルを示し、その詳細は(5)で明らかにする。

積分点の Jacobian は下式で計算する。

$$J(\xi^k) = \left\| \tau_1^{(2)}(\xi^k) \times \tau_2^{(2)}(\xi^k) \right\| \approx \left\| x_{,1}^{h^e}(\xi^k) \times x_{,2}^{h^e}(\xi^k) \right\| \quad (6.3.14)$$

式(6.3.1)に定義した接触力ベクトルは以下になる。

$$F^c = \sum_{e=1}^{n_{se}} \left\{ \sum_{k=1}^{n_{int}} \{ w^k J(\xi^k) f^k \} \right\} \quad (6.3.15)$$

式(6.3.15)の線形化式は以下になる。

$$\Delta G^c \approx \sum_{e=1}^{n_{se}} \left\{ \sum_{k=1}^{n_{int}} w^k J(\xi^k) \begin{bmatrix} \Delta t_N^h(\xi^k) \delta g_N^h(\xi^k) \\ + t_N^h(\xi^k) \Delta \delta g_N^h(\xi^k) \\ + \Delta t_{T\alpha}^h(\xi^k) \delta \bar{\xi}^{\alpha h}(\xi^k) \\ + t_{T\alpha}^h(\xi^k) \Delta \delta \bar{\xi}^{\alpha h}(\xi^k) \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \sum_{e=1}^{n_{se}} \left\{ \sum_{k=1}^{n_{int}} w^k J(\xi^k) \delta \phi^{c^k} \cdot k^{c^k} \Delta \phi^{c^k} \right\} \quad (6.3.16)$$

ここで、 $\Delta \phi^{c^k}$ は積分点 k の節点増分ベクトルであり、 k^{c^k} は要素内積分点 k の接触剛性マトリクスである。

式(6.3.2)で与える全体接触剛性マトリクスは以下になる。

$$K^c = \sum_{e=1}^{n_{se}} \left\{ \sum_{k=1}^{n_{int}} \{ w^k J(\xi^k) k^{c^k} \} \right\} \quad (6.3.17)$$

(4) 摩擦力の増分計算

本節では、摩擦構成式(6.1.26)の時間積分方法を議論する。ここでは、計算ステップ n の各物理量は下付き添え字 n で表し、既知量だと仮定する。計算ステップ $n+1$ では、これらの物理量が更新され、下付き添え字 $n+1$ と表す。

摩擦力の計算は後退型 Euler 積分方法より計算する。具体的には、ステップ $n+1$ 時の節点変位が得られた後、以下の手順で摩擦力を計算する。

- 1) 粘着摩擦状態であることを仮定し、摩擦力 $t_{T,n+1}^{\text{trial}}$ を計算する。
- 2) 更新後の摩擦力は摩擦則(6.1.25)を満足するかどうかをチェックする。満足している場合では計算が終了するが、しない場合では、摩擦則(6.1.26)を満足するように修正する。

Coulomb 摩擦則を採用し、また Penalty 法を用いて計算する場合では、以下の計算になる。

$$t_{N,n+1} = \epsilon_N g_{N,n+1} \quad (6.3.18)$$

$$t_{T\alpha_{n+1}}^{\text{trial}} = t_{T\alpha_n} + \epsilon_T m_{\alpha\beta} [\xi_{n+1}^\beta - \xi_n^\beta] \quad (6.3.19)$$

$$\Phi_{n+1}^{\text{trial}} = \|t_{T_{n+1}}^{\text{trial}}\| - \mu t_{N_{n+1}} \quad (6.3.20)$$

次にすべり条件式 $\Phi_{n+1}^{\text{trial}}$ がチェックされ、各変数を更新する。

$$t_{T_{n+1}} = \begin{cases} t_{T_{n+1}}^{\text{trial}} & \text{if } \Phi_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0 \\ \mu t_{N_{n+1}} \frac{t_{T_{n+1}}^{\text{trial}}}{\|t_{T_{n+1}}^{\text{trial}}\|} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6.3.21)$$

また、Lagrange 法を採用するとき、Lagrange 乗数は直接上式の $t_{N_{n+1}}$ と $t_{T_{n+1}}^{\text{trial}}$ と対応しているので、このアルゴリズムはそのまま利用できる。

式(6.3.21)の線形化式は

$$\Delta t_{T_{n+1}} = \begin{cases} \epsilon_T [m_{\alpha\beta} \Delta \xi_{n+1}^\beta + m_{\alpha\beta\gamma} \Delta \xi_{n+1}^\gamma (\xi_{n+1}^\beta - \xi_n^\beta)] & \text{if } \Phi_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0 \\ \mu \epsilon_N H(g_N) p_{T\alpha} \Delta g_N + \frac{\mu t_{N_{n+1}}}{\|t_{T_{n+1}}^{\text{trial}}\|} \Delta t_{T_{n+1}}^{\text{trial}} [\delta_\alpha^\beta - p_T^\beta p_{T\alpha}] \\ + \mu t_{N_{n+1}} p_T \cdot [\Delta \Phi_{,\beta}^{(2)} + \Phi_{,\beta\gamma}^{(2)} \Delta \xi_{n+1}^\gamma] p_T^\beta p_{T\alpha} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6.3.22)$$

ここでは式

$$p_T = \frac{t_{T_{n+1}}^{\text{trial}}}{\|t_{T_{n+1}}^{\text{trial}}\|} \quad (6.3.23)$$

$$\Delta p_T = \frac{1}{\|t_{T_{n+1}}^{\text{trial}}\|} [1 - p_T \otimes p_T] \Delta t_{T_{n+1}}^{\text{trial}} \quad (6.3.24)$$

を利用した。

(5) 接触剛性マトリクスおよび接触力：Penalty 法

本節では、Penalty 法を採用したときの接触剛性マトリクスおよび接触力を導く。本ソフトウェアは Augmented Lagrange 法を採用していて、そのときの接触剛性マトリクスおよび接触力は Penalty 法とも少し変換した形になり、その内容は 6.3.3 節で詳細に説明する。

式(6.3.15)また式(6.3.18)に示した節点変分と節点増分ベクトルは以下のように書き、

$$\delta \Phi = \{\delta \Phi^{(1)}, \delta \Phi_1^{(2)}, \delta \Phi_2^{(2)}, \dots, \delta \Phi_{n_{n_g}}^{(2)}\} \quad (6.3.25)$$

$$\Delta \Phi = \{\Delta \Phi^{(1)}, \Delta \Phi_1^{(2)}, \Delta \Phi_2^{(2)}, \dots, \Delta \Phi_{n_{n_g}}^{(2)}\} \quad (6.3.26)$$

式(6.3.15)から接触力は下式へ書き換える

$$f^c = t_N N + t_{T_1} D_1 + t_{T_2} D_2 \quad (6.3.27)$$

ここでは t_N と t_{T_α} 式(6.3.18)と(6.3.21)より計算する。また、ベクトル N , D_1 と D_2 は以下のように定義される。

$$N = \begin{bmatrix} n \\ -N_1 n \\ \vdots \\ -N_{n_{n_g}} n \end{bmatrix}, T_\alpha = \begin{bmatrix} \tau_\alpha \\ -N_1 \tau_\alpha \\ \vdots \\ -N_{n_{n_g}} \tau_\alpha \end{bmatrix}, N_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ -N_{1,\alpha} n \\ \vdots \\ -N_{n_{n_g},\alpha} n \end{bmatrix} \quad (6.3.28)$$

$$D_1 = \frac{1}{\det[A]} [A_{22}(T_1 - g_N N_1) - A_{12}(T_2 - g_N N_2)] \quad (6.3.29)$$

$$D_2 = \frac{1}{\det[A]} [A_{11}(T_2 - g_N N_2) - A_{12}(T_1 - g_N N_1)] \quad (6.3.30)$$

$$\bar{N}_1 = N_1 - (\Phi_{t_{12}} \cdot n) D_2 \quad (6.3.31)$$

$$\bar{N}_2 = N_2 - (\Phi_{t_{12}} \cdot n) D_1 \quad (6.3.32)$$

ここで、マトリクス A は式(6.1.24)で与える。

接触剛性マトリクスは法線方向とすべり方向剛性マトリクスに分解され、

$$k^c = k_N^c + k_T^c \quad (6.3.33)$$

各項は式(6.3.16)、式(6.3.15)および式(6.3.22)より得られる。ここで、

$$k_N^c = \Delta t_N^h(\xi^k) \delta g_N^h(\xi^k) + t_N \Delta(\delta g_N) \quad (6.3.34)$$

$$k_T^c = \Delta t_{T_\alpha} \delta \xi^\alpha \quad (6.3.35)$$

$$k_T^c = \Delta t_{T_\alpha} \delta \xi^\alpha +$$

$$\mathbf{t}_{T\alpha} \Delta(\delta \xi^\alpha) = \mathbf{k}_T^{\text{direct}} + \mathbf{t}_{T\alpha} A^{\alpha\beta} \mathbf{k}_{T\beta}^c$$

であり、式(6.3.34)を展開すると

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_N^c = & \epsilon_N H(\mathbf{g}_N) \mathbf{N} \mathbf{N}^T \\ & + \mathbf{t}_N \left\{ \mathbf{g}_N \left[\begin{array}{c} m^{11} \bar{\mathbf{N}}_1 \bar{\mathbf{N}}_1^T \\ + m^{12} (\bar{\mathbf{N}}_1 \bar{\mathbf{N}}_2^T + \bar{\mathbf{N}}_2 \bar{\mathbf{N}}_1^T) \\ + m^{22} \bar{\mathbf{N}}_2 \bar{\mathbf{N}}_2^T \\ + \mathbf{N}_1 \mathbf{D}_1^T + \mathbf{N}_2 \mathbf{D}_2^T \\ + (\boldsymbol{\phi}_{t,12} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2^T + \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_1^T) \end{array} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.3.36)$$

になる。

すべり方向の剛性マトリクス \mathbf{k}_T^c を得るため、次の補助ベクトルを定義する。

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -N_{1,\beta} \boldsymbol{\tau}_\alpha \\ \vdots \\ -N_{n_{n_e},\beta} \boldsymbol{\tau}_\alpha \end{bmatrix}, \mathbf{N}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -N_{1,\alpha\beta} \mathbf{n} \\ \vdots \\ -N_{n_{n_e},\alpha\beta} \mathbf{n} \end{bmatrix}, \quad (6.3.37)$$

$$\mathbf{P}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ -N_{1,\alpha} \mathbf{p}_T \\ \vdots \\ -N_{n_{n_e},\alpha} \mathbf{p}_T \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{\alpha 1} = \mathbf{T}_{\alpha 1} - (\boldsymbol{\phi}_{t,12} \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha) \mathbf{D}_2 \quad (6.3.38)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{\alpha 2} = \mathbf{T}_{\alpha 2} - (\boldsymbol{\phi}_{t,12} \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha) \mathbf{D}_1 \quad (6.3.39)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{P}_1 - (\boldsymbol{\phi}_{t,12} \cdot \mathbf{p}_T) \mathbf{D}_2 \quad (6.3.40)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_2 = \mathbf{P}_2 - (\boldsymbol{\phi}_{t,12} \cdot \mathbf{p}_T) \mathbf{D}_1 \quad (6.3.41)$$

$$\mathbf{G}_\alpha^{\text{spac}} = [-\mathbf{T}_{\alpha\beta} - \mathbf{T}_{\beta\alpha} + [\boldsymbol{\phi}_{t,\beta\gamma} \boldsymbol{\tau}_\alpha + \boldsymbol{\phi}_{t,\alpha\gamma} \boldsymbol{\tau}_\alpha] \mathbf{D}_\gamma] \mathbf{g}_T^\beta \quad (6.3.42)$$

ここでは、 \mathbf{p}_T は式(6.3.25)に定義されたベクトルである。これらの式を利用し、式(6.3.35)の各項は以下のように書き換える。

$$\mathbf{k}_T^c = \mathbf{k}_T^{\text{direct}} + \mathbf{t}_{T\alpha} A^{\alpha\beta} \mathbf{k}_{T\beta}^c \quad (6.3.43)$$

ここでは、

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{T\alpha}^c = & \mathbf{T}_{\alpha\beta} \mathbf{D}_\beta^T + \mathbf{D}_\beta \mathbf{T}_{\alpha\beta}^T - (\boldsymbol{\phi}_{t,\beta\gamma} \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha) \mathbf{D}_\beta \mathbf{D}_\gamma^T \\ & + \bar{\mathbf{T}}_{\beta\alpha} \mathbf{D}_\beta^T + \mathbf{D}_\beta \bar{\mathbf{T}}_{\beta\alpha}^T + \mathbf{g}_N (\mathbf{N}_{\alpha\beta} \mathbf{D}_\beta^T + \mathbf{D}_\beta \mathbf{N}_{\alpha\beta}^T) \\ & - \mathbf{N} \bar{\mathbf{N}}_\alpha^T - \mathbf{T}_\beta m^{\beta\gamma} \bar{\mathbf{T}}_{\gamma\alpha}^T - \bar{\mathbf{N}}_\alpha \mathbf{N}^T - \bar{\mathbf{T}}_{\gamma\alpha} m^{\beta\gamma} \mathbf{T}_\beta^T \end{aligned} \quad (6.3.44)$$

また、粘着摩擦状態では

$$\mathbf{k}_T^{\text{direct}} = \epsilon_T (\mathbf{m}_{\alpha\beta} \mathbf{D}_\alpha \mathbf{D}_\beta^T + \mathbf{D}_\alpha \mathbf{G}_\alpha^{\text{spac}T}) \quad (6.3.45)$$

すべり摩擦状態では

$$\mathbf{k}_T^{\text{direct}} = -\mu \epsilon_N H(\mathbf{g}_N) \mathbf{p}_{T\alpha} \mathbf{D}_\alpha \mathbf{N}^T +$$

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon_T \mu t_N}{\|\mathbf{t}_T^{\text{trial}}\|} [\delta_\alpha^\beta - \mathbf{p}_T^\beta \mathbf{p}_{T\alpha}] \{ m_{\beta\gamma} \mathbf{D}_\alpha \mathbf{D}_\beta^T + \mathbf{D}_\alpha \mathbf{G}_\alpha^{\text{spac}T} \} \\ & - \mu t_N \mathbf{p}_T^\alpha \mathbf{p}_{T\beta} \mathbf{D}_\beta \bar{\mathbf{P}}_\alpha^T \end{aligned} \quad (6.3.46)$$

である。

6.3.3. Augmented Lagrange 法

本節では Augmented Lagrange 法のアルゴリズム詳細を議論する。

(1) アルゴリズム

Augmented Lagrange 法の支配方程式は式(6.2.23)～式(6.2.24)で示している。この方法は反復計算を利用し、正確な Lagrange 乗数値を求められることを 6.2.2(3)で説明した。本節では、接触仮想仕事を以下のように書き換える。

$$G^c(\Phi_{n+1}^{(k)}, \delta\Phi) = - \int_{\gamma^{(1)}} [(\lambda_{N_{n+1}}^{(k)} + \epsilon_N g_{N_{n+1}}^{(k)}) \delta g_N - t_{T_{n+1}}^{(k)} \cdot \delta g_T] d\gamma \quad (6.3.47)$$

ここで、時間間隔 $[t_n, t_{n+1}]$ 内の反復計算ステップ数を上付き添え字(k)と示した。

Augmented Lagrange 法の計算手順はすでに6.2.2(3)節に説明した。この節では、まず接触力とLagrange 乗数の更新方法を説明し、最後に詳細な計算手順をまとめる。

(a) 接触力の時間積分

後退 Euler 積分法を採用し、式(6.2.24)の増分計算を行う。

$$t_{N_{n+1}}^{(k)} = (\lambda_{N_{n+1}}^{(k)} + \epsilon_N g_{N_{n+1}}^{(k)}) \quad (6.3.48)$$

$$t_{T_{n+1}}^{(k)} = \lambda_{T_{n+1}}^{(k)} + \epsilon_T \left(\Delta\Phi_T^{(k)} - \Delta\zeta^{(k)} \frac{t_{T_{n+1}}^{\text{trial}(k)}}{\|t_{T_{n+1}}^{\text{trial}(k)}\|} \right) \quad (6.3.49)$$

ここでは

$$\Delta\Phi_T^{(k)} = \Phi_{T_{n+1}}^{(k)} - \Phi_{T_n} \quad (6.3.50)$$

$$t_{T_{n+1}}^{\text{trial}(k)} = \lambda_{T_{n+1}}^{(k)} + \epsilon_T \Delta\Phi_T^{(k)} \quad (6.3.51)$$

また、 $\Delta\zeta$ は時刻 t_{n+1} での摩擦条件(6.2.35)より計算する。

$$\Phi_{n+1}^{\text{trial}(k)} = \|t_{T_{n+1}}^{\text{trial}(k)}\| - \mu t_{N_{n+1}}^{(k)} \quad (6.3.52)$$

$$\Delta\zeta = \begin{cases} 0 & \text{if } \Phi_{n+1}^{\text{trial}(k)} \leq 0 \\ \frac{\Phi_{n+1}^{\text{trial}(k)}}{\epsilon_T} & \text{if } \Phi_{n+1}^{\text{trial}(k)} > 0 \end{cases} \quad (6.3.53)$$

(b) Lagrange 乗数の更新

更新後の接触力はまだ収束していないと判断し

た場合では、Lagrange 乗数を更新する必要がある。ここでは、時間間隔 $[t_n, t_{n+1}]$ 間内のすでに k ステップを計算完了し、ステップ k+1 の Lagrange 乗数を計算しようとする。

法線方向 Lagrange 乗数の更新は以下になる。

$$\lambda_{N_{n+1}}^{(k+1)} = \lambda_{N_{n+1}}^{(k)} + \epsilon_N g_{N_{n+1}}^{(k)} \quad (6.3.54)$$

すべり方向 Lagrange 乗数を正しく選択すれば、摩擦係数 μ と等しくなるので、式(6.3.48)と比べれば、すべり方向 Lagrange 乗数の更新は以下になることが分かる。

$$\lambda_{T_{n+1}}^{(k+1)} = \lambda_{T_{n+1}}^{(k)} + \epsilon_T \left(\Delta\Phi_T^{(k)} - \Delta\zeta^{(k)} \frac{t_{T_{n+1}}^{\text{trial}(k)}}{\|t_{T_{n+1}}^{\text{trial}(k)}\|} \right) \quad (6.3.55)$$

ここでは、 $\Delta\zeta^{(k)}$ は式(6.3.52)より計算する。

(c) 計算手順

1. 初期設定

$$\begin{aligned} \lambda_{N_{n+1}}^{(0)} &= \lambda_{N_n} \\ \lambda_{T_{n+1}}^{(0)} &= \lambda_{T_n} \end{aligned}$$

k=0

2. 下式を解き、 $\Phi_{n+1}^{(k)}$ を得る。

$$G^{\text{int,ext}}(\Phi_{n+1}^{(k)}, \delta\Phi) + \int_{\gamma^{(1)}} [(\lambda_{N_{n+1}}^{(k)} + \epsilon_N g_{N_{n+1}}^{(k)}) \delta g_N - t_{T_{n+1}}^{(k)} \cdot \delta g_T] d\gamma = 0$$

ここでは、 $t_{T_{n+1}}^{(k)}$ は式(6.3.51)より計算する。

3. 式(6.3.50)～式(6.3.54)を従い、接触力 $t_{N_{n+1}}^{(k+1)}$ と $t_{T_{n+1}}^{(k+1)}$ を計算する。

4. 以下の接触拘束条件をチェックする。

$$\begin{aligned} g_{N_{n+1}}^{(k)} &\leq \text{許容誤差であるが、粘着摩擦状態では} \\ \|\Phi_{T_{n+1}}^{(k)} - \Phi_{T_n}\| &\leq \text{許容誤差である。} \end{aligned}$$

これらの条件を満足すれば収束を判定し、計算を終了する。そうでない場合には式(6.3.54)と式(6.3.55)に従い、Lagrange 乗数を更新する。

(2) 対称化処理

後退 Euler 積分法(6.3.48)～式(6.3.52)を採用している場合、式(6.3.47)から得られる consistent 接触剛性マトリクス \mathbf{k}_T^c は非対称である。この節では、第(1)節で示したアルゴリズムを修正し、 \mathbf{k}_T^c を対称化する方法を説明する。

対称化処理のため、式(6.3.54)に示した摩擦降伏関数を以下のように修正する。

$$\Phi_{n+1}^{\text{trial}(k)} = \left\| \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{\text{trial}(k)} \right\| - \mu \lambda_{N_{n+1}}^{(k)} \quad (6.3.56)$$

ステップ k での計算では、 $\lambda_{N_{n+1}}^{(k)}$ を定数として処理しているため、摩擦力の更新計算(6.3.18)は

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{(k)} = \begin{cases} \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{\text{trial}(k)} & \text{if } \Phi_{n+1}^{\text{trial}(k)} \leq 0 \\ \mu \lambda_{N_{n+1}}^{(k)} \frac{\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{\text{trial}(k)}}{\left\| \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{\text{trial}(k)} \right\|} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6.3.57)$$

となり、その線形化式から非対称項を取り除くことができる。式の詳細は(3)節に明らかにする。

式(6.3.56)に示した処理は計算ステップ k では、法線方向の接触力の変化を無視することである。この処理により、更新後の接触力は Coulomb 摩擦則を満足しないことになる。しかし、Lagrange 乗数は常に式(6.3.54)、式(6.3.55)より更新するので、理論的には対称化処理のない計算と同じ結果が得られる。

対称化処理後の Augmented Lagrange 法の実行手順は上記(c)に示した手順を参照することができるが、以下の区別を注意すべきである。

1. ステップ 2 では、 $\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{(k)}$ の計算は式(6.3.49)に示したのではなく、式(6.3.57)である。
2. ステップ 4 での収束判断では、 $\lambda_{N_{n+1}}^{(k)}$ の誤差もチェックする必要がある。

(3) Consistent 剛性マトリクスおよび接触力

6.3.2(5)節では、Penalty 法の接触剛性マトリクスと接触力の計算式を求めたが、本節では、非対称 Augmented Lagrange 法または対称化した Augmented Lagrange 法の consistent 剛性マトリ

クスおよび接触力の計算式を求める。また、接触力の計算方法を除き、考え方は節 6.3.2(5)節に示した方法と同じなので、本節では、結果だけを示す。

(a) 接触力

式(6.3.29)と同じく、接触力は以下になる。

$$\mathbf{f}^c = \mathbf{t}_N \mathbf{N} + \mathbf{t}_{T_1} \mathbf{D}_1 + \mathbf{t}_{T_2} \mathbf{D}_2 \quad (6.3.58)$$

ただし、ここでは \mathbf{t}_N と \mathbf{t}_{T_α} 式(6.3.48)、式(6.3.49)または式(6.3.57)より計算する。

式(6.3.33)と同じく、剛性マトリクスは法線方向とすべり方向剛性マトリクスからなる。

$$\mathbf{k}^c = \mathbf{k}_N^c + \mathbf{k}_T^c \quad (6.3.59)$$

(b) 法線方向接触マトリクス

$$\mathbf{k}_N^c = \epsilon_N H \left(\lambda_N^{(k)} + \epsilon_N g_N \right) \mathbf{N} \mathbf{N}^T + \mathbf{t}_N \left\{ \begin{aligned} & g_N [m^{11} \bar{\mathbf{N}}_1 \bar{\mathbf{N}}_1^T + m^{12} (\bar{\mathbf{N}}_1 \bar{\mathbf{N}}_2^T + \bar{\mathbf{N}}_2 \bar{\mathbf{N}}_1^T) + m^{22} \bar{\mathbf{N}}_2 \bar{\mathbf{N}}_2^T] \\ & + \mathbf{D}_1 \mathbf{N}_1^T + \mathbf{D}_2 \mathbf{N}_2^T + \mathbf{N}_1 \mathbf{D}_1^T + \mathbf{N}_2 \mathbf{D}_2^T \\ & + (\boldsymbol{\phi}_{t,1,2} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2^T + \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_1^T) \end{aligned} \right\} \quad (6.3.60)$$

式(6.3.35)と同じく、接触方向剛性マトリクスも以下のように分解する。

$$\mathbf{k}_T^c = \mathbf{k}_T^{c, \text{direct}} + \mathbf{t}_{T_\alpha} A^{\alpha\beta} \mathbf{k}_{T_\beta}^c \quad (6.3.61)$$

(c) 非対称剛性マトリクス

式(6.3.43)、式(6.3.44)と照らし合わせ、対称化処理なし時の剛性マトリクスは以下になる。

粘着摩擦状態では

$$\mathbf{k}_T^{c, \text{direct}} = \epsilon_T \left(m_{\alpha\beta} \mathbf{D}_\alpha \mathbf{D}_\beta^T + \mathbf{D}_\alpha \mathbf{G}_\alpha^{\text{spac}T} \right) \quad (6.3.62)$$

すべり摩擦状態では

$$\mathbf{k}_T^{c, \text{direct}} = -\mu \epsilon_N H \left(\lambda_N^{(k)} + \epsilon_N g_N \right) \mathbf{p}_{T_\alpha} \mathbf{D}_\alpha \mathbf{N}^T$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\epsilon_T \mu t_N}{\|t_T^{\text{trial}}\|} [\delta_\alpha^\beta - p_T^\beta p_{T_\alpha}] \{ m_{\beta\gamma} D_\alpha D_\beta^T + D_\alpha G_\alpha^{\text{space}^T} \} \\
& - \mu t_N p_T^\alpha p_{T_\beta} D_\beta \bar{P}_\alpha^T
\end{aligned} \quad (6.3.63)$$

(d) 対称剛性マトリクス

式(6.3.43)、式(6.3.44)と照らし合わせ、対称化処理後の剛性マトリクスは以下になる。

粘着摩擦状態では

$$k_T^{\text{direct}} = \epsilon_T m_{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta^T \quad (6.3.64)$$

すべり摩擦状態では

$$k_T^{\text{direct}} = \frac{\epsilon_T \mu t_N}{\|t_T^{\text{trial}}\|} [\delta_\alpha^\gamma - p_T^\gamma p_{T_\alpha}] m_{\beta\gamma} D_\alpha D_\beta^T \quad (6.3.65)$$

6.3.4. 微小すべり解析

すべりによる接触面の幾何形状を無視できる場合は、微小すべり状態と定義する。このとき、線形化処理した仮想仕事式は以下になる。

$$\begin{aligned}
\Delta G^c & \approx \sum_{e=1}^{n_{se}} \left\{ \sum_{k=1}^{n_{int}} W^k J(\xi^k) \begin{bmatrix} \Delta t_N^h(\xi^k) \delta g_N^h(\xi^k) \\ + \Delta t_{T_\alpha}^h(\xi^k) \delta \bar{\xi}^{\alpha^h}(\xi^k) \end{bmatrix} \right\} \\
& = \sum_{e=1}^{n_{se}} \left\{ \sum_{k=1}^{n_{int}} W^k J(\xi^k) \delta \Phi^{c^k} \cdot k^{c^k} \Delta \Phi^{c^k} \right\}
\end{aligned} \quad (6.3.66)$$

または接触面の相対すべり量は

$$\Delta \bar{\xi}^{(2)\alpha} = [\Delta \mathbf{x}^{(1)} - \Delta \bar{\mathbf{x}}^{(2)}] \cdot \boldsymbol{\tau}^{(2)\alpha} \quad (6.3.67)$$

になる。これらの式を式(6.3.16)、式(6.2.34)と比べると、有限すべりと微小すべりの区別が分かる。微小すべり計算は有限すべり計算と比べ、計算式は短

くでき、計算コストを削減できる。本ソフトウェアでは、微小すべり計算も選択できる。

対称化した Augmented Lagrange 法を採用するとき、法線方向接触剛性マトリクスは以下になる。

$$k_N^c = \epsilon_N H \left(\lambda_N^{(k)} + \epsilon_N g_N \right) \mathbf{N} \mathbf{N}^T \quad (6.3.68)$$

摩擦なし状態では、接触剛性マトリクスは式(6.3.67)になる。

摩擦のある場合、粘着摩擦状態では

$$k_T^c = \epsilon_T m_{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta^T \quad (6.3.69)$$

すべり摩擦状態では

$$\begin{aligned}
k_T^c & = -\mu \epsilon_N H \left(\lambda_N^{(k)} + \epsilon_N g_N \right) p_{T_\alpha} D_\alpha \mathbf{N}^T \\
& + \frac{\epsilon_T \mu t_N}{\|t_T^{\text{trial}}\|} [\delta_\alpha^\gamma - p_T^\gamma p_{T_\alpha}] m_{\beta\gamma} D_\alpha D_\beta^T
\end{aligned} \quad (6.3.70)$$

または、対称化した Augmented Lagrange 法を採用するとき、すべり状態では

$$k_T^c = \frac{\epsilon_T \mu t_N}{\|t_T^{\text{trial}}\|} [\delta_\alpha^\gamma - p_T^\gamma p_{T_\alpha}] m_{\beta\gamma} D_\alpha D_\beta^T \quad (6.3.71)$$

となる。

7. 例題

7.1. 円柱のくびれ変形解析

軟鋼などの弾塑性材からなる円柱が軸方向に引っ張られる場合では不安定なくびれ変形が現ることはよく知られる現象である。有限要素法による解析では、この現象を再現できることがその解析能力を示す検証の1つである。本解析は Simo ら[9]が用いた解析モデルを参考し作ったものである。

図 7.1 は解析モデルを示している。対称性から、円柱の 8 分の 1 をとり、431 個 6 面体要素から構築する。円柱の長さは 53.334 である。円柱の端の半径は 6.413 であり、その軸方向変形を固定する。また、この端面から半径は徐々に減少し、円柱の中央では半径は 6.3054 となる。この解析では、円柱の中央面に 6.0 の強制変位を加え、その中央面の半径

変化(くびれ)を観察することである。また、本計算は線形等方硬化 Mises 弾塑性モデルを採用し、そのヤング率、ポアソン比、降伏応力、硬化係数は、それぞれ 206.9, 0.325, 2.0, 1.0 である。

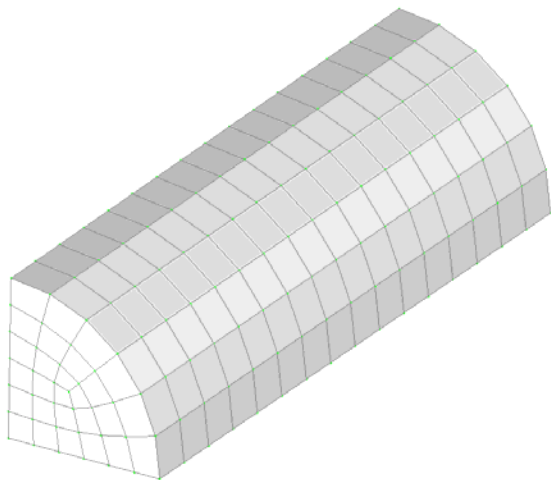


図 7.1 円柱のくびれ変形解析 (8 分の 1 モデル)

図 7.2 は変形後の円柱形状を示し、色の濃淡は縦方向の変位を表している。本計算結果から得られたくびれ量は 3.528 であり、既存の結果とよく一致している。

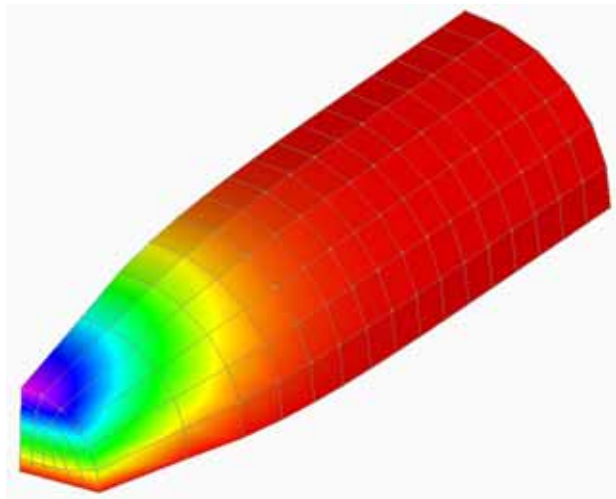
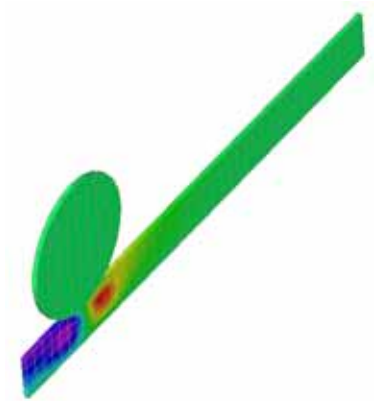


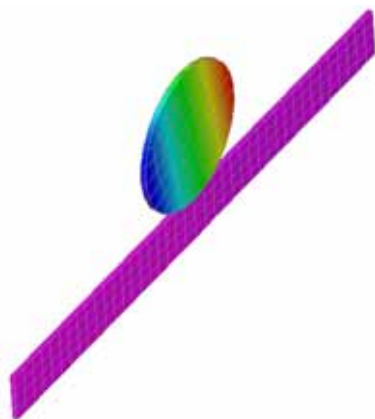
図 7.2 円柱のくびれ変形後の形状

7.2. スチール円板とゴムの接触変形解析

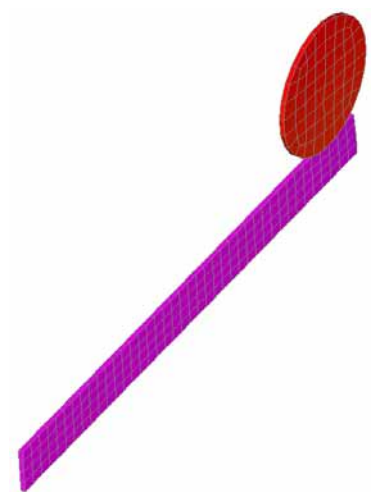
本解析問題は NAFEMS(<https://www.nafems.org>) Advanced Finite Element Contact Benchmarks 問題の 1 つである。この問題は変形体間に摩擦が有する有限すべり接触問題を解析する能力を検証するものである。



(a)



(b)



(c)

図 7.3 スチール円板とゴムの接触変形図

(a) 円板回転前; (b) 円板回転途中; (c) 変形完了後

このベンチマークは半径が 30mm のスチール円板は長さ 240mm のゴム上に転がる問題である。ここでは、円板の中心は固定し回転させ、円柱とゴム間の摩擦よりゴムを長さ方向に剛体変位を起こし、そのゴム板の長さ方向の変位量が検証対象になっ

ている。

その解析過程は以下である：

- ・円板を完全に固定し、ゴム板の底面に円板方向へ 3mm の強制変位を加える。
- ・円板の中心は固定し 360 度を回転させる。このとき、ゴム板の底面は上方向の変位を固定させ、長さ方向は完全にフリーにする。

スチールとゴムの材質は以下である：

- ・スチール：ヤング率 210kN/mm²、ポアソン比 0.3
- ・ゴム(St. Venant-Kitchhoff 超弾性材)：ヤング率 10kN/mm²、ポアソン比 0.45、または、摩擦係数は 0.3 である。

本解析から得られたゴム長さ方向の変位は 182.8mm であり、既存の結果と一致している。

参考文献

- [1] 久田俊明：“非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎”，丸善(1992)
- [2] 久田俊明，野口裕久：“非線形有限要素法の基礎と応用”，丸善(1995)
- [3] 富田佳宏：“数値弾塑性力学”，養賢堂(1990)
- [4] K.J.Bathe: "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, (1982)
- [5] O.C.Zienkiewicz and R.L.Taylor: "The Finite Element Method, 6th Ed., Vol. 2, Solid and Fluid Mechanics, Dynamic and Nonlinearity", McGraw-Hill(2005)
- [6] G.Dhondt: "The Finite Element Method for Three-dimensional Thermo mechanical Applications", John Wiley & Sons Ltd(2004)
- [7] E.A.Souza, D. Peric, D.R.J. Owen: "Computational Methods for Plasticity: Theory and Application", Wiley InterScience(2009)
- [8] J. Bonet, and R.D.Wood: "Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, 1st ed.", Cambridge University Press(1997)
- [9] J.C.Simo, and T.J.R.Hughes: "Computational Inelasticity", Springer (1998)
- [10] T.A.Laursen: "Computational Contact and Impact Mechanics: Fundamental and Modelling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis", Springer Verlag(2003)
- [11] P. Wriggers: "Computational Contact Mechanics", John Wiley & Sons Ltd, (2002)
- [12] T.J.R.Hughes, and J. Winget: "Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis", Int. J. for Num. Meth. in Eng., 15(1980), p. 1862.
- [13] R.L.Taylor, P.J.Beresford, and E.L. Wilson: "A non-conforming element of stress analysis", Int. J. Num. Methods Eng., 10(1976), p.1211
- [14] T.J.R.Hughes: "Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media", Int. J. for Num. Meth. in Eng., 15(1980), p. 1413
- [15] E.N. Dvorkin, and K.J.Bathe: "A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis", Eng. Comput., 1(1994), p.77
- [16] P.S.Lee, K.J. Bathe: "Development of MITC isotropic triangular shell finite elements" Computers & Structures, 82(2004), p.945